COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 FÉVRIER 1870.

PRÉSIDENCE DE M. LIOUVILLE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. Bertrand fait hommage à l'Académie du second volume de son « Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral ».

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque; par* **M. de Saint-Venant** [deuxième Partie (*)].

« 6. Maintenant que fera-t-on, faute de pouvoir intégrer l'équation différentielle en ψ, lorsque, le talus supérieur ω étant donné, l'inclinaison ε_1 aussi donnée, de la face du mur, ne sera pas égale à ε tiré de (13), c'est-à-dire lorsque les angles ω et ε_1 n'auront pas entre eux la relation nécessaire pour que les expressions (10) satisfassent exactement à la condition qui fixe l'inclinaison de la pression du massif sur la face du mur dans l'état d'équilibre-limite ?

» Faudra-t-il, pour obtenir toujours une approximation, revenir à la théorie de 1773, bien qu'on sache qu'alors les surfaces de glissement, ou de tendance à rupture, ne sont pas planes comme Coulomb le supposait faute de mieux?

(*) Voir *Comptes rendus*, 7 février, t. LXX, p. 229.

» L'étude de la théorie nouvelle m'a convaincu qu'elle offrait pour cela un expédient plus facile et plus sûr.

» Il consiste à se servir des expressions (10) de N_1, N_2, T et de celles (11) de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ qu'on en déduit par substitution, comme si elles étaient exactes quel que soit l'angle ε_1 du mur qui soutient le massif.

» Cela, en effet, revient simplement à supposer que l'angle du frottement sur la face du mur, au lieu d'être φ, *est l'angle toujours moindre* $\varphi_1 = \text{arc tang}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ qui résulte de ces expressions (11) de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$.

» Or (ainsi qu'il a été observé au Rapport), le frottement des terres contre les murs les rend plus stables et diminue leur chance d'être renversés ou poussés en avant. En supposant ce frottement, non pas nul, sans doute (comme font encore quelques ingénieurs par une prudence exagérée), mais *moindre qu'il n'est effectivement*, cela conduira simplement à adopter, pour les murs, des dimensions un peu plus fortes qu'il n'est nécessaire. L'emploi que je propose ici des valeurs (11) de T et N, comme approximation dans les cas où la solution rigoureuse ne peut être obtenue, est donc favorable à la stabilité et à la sécurité.

» Rien ne prouve qu'il en soit de même des formules déduites de la théorie de Coulomb : on n'a aucune raison de conjecturer qu'elles donnent des résultats au-dessus plutôt qu'au-dessous de la réalité. Elles sont donc moins sûres.

» Or, M. Levy, à qui j'ai parlé de ce moyen de tirer de sa théorie un parti plus étendu, a aussitôt cherché à simplifier et à rendre calculables par logarithmes les expressions (13) de T et N. Il y est heureusement parvenu, et m'a communiqué les résultats suivants, non mentionnés à son Mémoire :

$$(15)\quad \begin{cases} \sin(2\alpha+\omega) = \dfrac{\sin\omega}{\sin\varphi} \text{ (pour calculer un angle auxiliaire } \alpha\text{)}, \\ \text{tang}(\varphi_1+\varepsilon_1+\alpha) = \dfrac{\text{tang}(\varepsilon_1+\alpha)}{\text{tang}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)} \text{ (pour déterminer l'angle } \varphi_1\text{)}, \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\Pi p \sin\varphi}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)}\,\dfrac{\cos\alpha\sin(2\alpha+2\varepsilon_1)}{\cos(\alpha+\omega)}, \\ \mathfrak{N} = \dfrac{\mathfrak{T}}{\text{tang}\,\varphi_1}. \end{cases}$$

C'est de ces formules (où α représente l'angle fait avec l'horizon par l'une des deux directions rectangulaires de *pressions principales*, nor-

males aux faces pressées), qui se réduisent à ce que donne (14) quand $\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha$, que l'on pourra tirer la valeur [quand elle ne sera pas exacte ou conforme à (14)] au moins approximative des poussées exercées sur un mur d'inclinaison quelconque ε_1 avec la verticale, par un massif de terre s'élevant derrière le haut du mur sous un angle ω fait avec l'horizon. Elles sont plus simples, en même temps que plus sûres, disons-nous, que celles qui résultent de la théorie de Coulomb (*).

» 7. On peut se demander, en partant des formules (10) et (11) regardées comme donnant une première approximation, s'il y a possibilité de s'élever analytiquement à une approximation plus grande.

» Égalons, pour cela, N_1, N_2, T à leurs expressions (10) augmentées respectivement de trois inconnues nouvelles, n_1, n_2, t supposées assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et produits, et remplaçons-les, après substitution dans (1), (2), (3), par les trois dérivées secondes

$$\frac{d^2\psi'}{dy^2}, \quad \frac{d^2\psi'}{dx^2}, \quad -\frac{d^2\psi'}{dx\,dy},$$

multipliées par Π, d'une inconnue auxiliaire unique ψ'. Les deux premières équations seront satisfaites, et la troisième se changera en une équation aux dérivées partielles du second ordre *linéaire*, dont l'intégrale générale est facile à poser, soit sous forme finie, soit en série transcendante transformable en intégrale double prise de zéro à l'infini comme dans la formule de Fourier. Mais les fonctions arbitraires, ou les coefficients et paramètres, seraient à déterminer de manière à satisfaire aux conditions définies

---

(*) Celle-ci fournit, par une analyse compliquée dont M. l'ingénieur en chef Saint-Guilhelm est parvenu à dégager la valeur de la poussée résultante $\mathcal{R}$, φ' étant l'angle quelconque du frottement contre la maçonnerie :

$$(16) \qquad \frac{\mathcal{N}}{\cos\varphi'} = \frac{\pm\mathcal{T}}{\sin\varphi'} = \Pi L \frac{\cos^2(\omega - \varepsilon_1)\cos(\varphi' + \varepsilon_1)}{\cos^2(\varphi + \varphi' + \varepsilon_1 - \omega)}\left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon_1)\cos(\varphi' + \varepsilon_1)}}\right]^2;$$

et si l'on veut avoir la valeur de l'angle V déterminant l'inclinaison, sur la verticale, de la ligne de rupture ou de glissement, ce qui est utile quand la forme du profil est un peu différente de celle que la formule (16) suppose, il faut la tirer de l'expression suivante, où le radical est le même que dans celle-ci :

$$(17) \qquad \cot(V + \varphi) = -\frac{(1 + \sqrt{\quad})\cot(\varphi + \varepsilon_1)}{1 + \cot(\varphi + \varepsilon_1)\cot(\varphi + \omega)\sqrt{\quad}}.$$

L'expression (16) donne, pour la composante normale $\mathcal{N}$ qui tend au renversement,

(5) et (6) relatives aux deux parties, de longueur infinie en un seul sens, MN, MQ du contour discontinu du massif; ou bien (conformément à l'observation de la fin du n° 5) aux conditions (6) à la surface MQ réduite à une longueur limitée, et à deux conditions telles que (5) relatives l'une au mur se terminant en N, l'autre à un plan de terre NQ fermant le triangle de base du massif ébouleux.

---

des valeurs un peu plus faibles, et, pour la composante $\mathfrak{T}$ qui tend à la stabilité, des valeurs sensiblement plus fortes que les formules (15) de la théorie nouvelle, comme on peut le voir par le tableau suivant, qui suppose $\varphi' = \varphi = 45$ degrés.

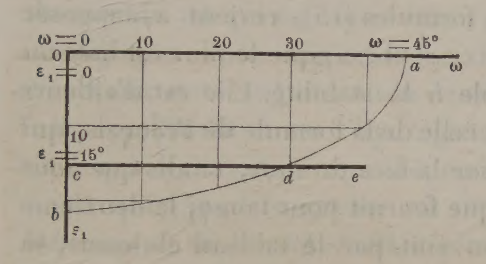
Pour	$\omega =$	0°	10°	20°	30°	40°	45° = φ
Pour $\varepsilon_1 = 0°$	$\varphi_1 =$	0	10	20	30	40	45
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy	0,1716	0,1738	0,1818	0,2010	0,2608	0,5000
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy	0	0,0306	0,0662	0,1160	0,2188	0,5000
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
Pour $\varepsilon_1 = 10°$	$\varphi_1 =$	35°46′58″	39°14′24″	41°54′20″	43°56′48″	44°59′56″	42°25′37″
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy	0,1936	0,2126	0,2408	0,2894	0,4109	0,8123
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy	0,1395	0,1736	0,2161	0,2790	0,3833	0,7424
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
Pour $\varepsilon_1 = 15°$	$\varphi_1 =$	42°22′ 4″	43°45′19″	44°38′25″	45° 0′ 0″	44°12′23″	39°53′46″
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Levy	0,2193	0,2477	0,2876	0,3536	0,5111	1,0006
	$\frac{\mathfrak{N}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Levy	0,1395	0,2371	0,2840	0,3536	0,4972	0,8365
	$\frac{\mathfrak{T}}{\Pi L} =$ Coulomb	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
Pour $\varepsilon_1 = 20°$	$\varphi_1 =$	44°45′40″	44°59′40″	44°52′27″	44°15′30″	42°20′36″	36°53′41″

Ce tableau comparatif ne donne les poussées que pour $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 10$ degrés et $\varepsilon_1 = 15$ degrés. Mais on voit, par les valeurs de l'angle $\varphi_1 = \text{arc tang}\,\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ qui sont relatées, que quand ε_1 atteint 20 degrés, cet angle φ_1 du frottement fictif de la terre contre la maçonnerie, pour des talus ω de 0 à 40 degrés, se rapproche tellement de l'angle du frottement réel, supposé ici 45 degrés, qu'il est inutile alors de comparer les résultats de la formule Coulomb et de la formule Levy pour achever de se convaincre que celle-ci donne une suffisante approximation avec une sécurité plus grande.

» 8. Une pareille détermination nous mènerait trop loin pour aujourd'hui, et paraît d'ailleurs affectée de difficultés d'un genre nouveau.

» Aussi, en me bornant à exprimer le vœu que quelqu'un l'entreprenne, ou fasse dans le même but quelque tentative meilleure, je terminerai par une remarque propre à donner quelque idée du degré d'approximation que les formules pratiques (15), établies par M. Levy à ma demande, sont susceptibles de donner.

» Imaginons que l'on construise deux surfaces ayant des abscisses horizontales proportionnelles aux angles ω du talus supérieur des terres et aux angles ε d'inclinaison de la face du mur destiné à les soutenir (ces abscisses étant portées sur deux axes rectangulaires horizontaux $O\omega$, $O\varepsilon$); et des ordonnées verticales $\mathfrak{N}$ qui soient : 1° pour l'une des surfaces, ce que fournirait une détermination exacte des poussées normales inconnues, qui s'exercent par unité superficielle sur un élément déterminé de cette face de mur; 2° pour l'autre surface, les valeurs plus ou moins approchées que donnent de ces mêmes poussées normales $\mathfrak{N}$ les formules (15).



» Ces deux surfaces de poussées normales vraies et approchées se couperont ou se toucheront suivant une courbe à double courbure ayant pour projection, sur le plan $\omega O \varepsilon_1$ des abscisses, la courbe plane *adb*, dont l'équation en ω et ε_1 est (13), ou pour $\varphi = 45°$,

$$\cos(2\varepsilon_1 - \omega + 45) = \frac{\sin\omega}{\sin 45};$$

car lorsque les angles ω et ε_1 ont entre eux cette relation, nous avons vu que les solutions données par les formules (15) étaient exactes.

» La même chose serait dite de deux surfaces dont les ordonnées verticales seraient les $\mathfrak{T}$ au lieu des $\mathfrak{N}$.

» Or, la ligne *cde* représente, sur la même figure, jusqu'à un talus ω tenu un peu au-dessous de sa limite, l'ensemble des projections horizontales des points de ces surfaces qui repondent à $\varepsilon_1 = 15°$, c'est-à-dire à un *fruit :*

$$\text{tang}\,\varepsilon_1 = 0{,}2679,$$

ou d'environ le quart de la hauteur, qui est celui que l'on donne le plus ordinairement à la face postérieure des murs de soutènement (généralement

par gradins avec terre comblant leurs redans). Le peu d'éloignement où sont les points de cette droite *cde* de ceux de la courbe *adb* montre que les formules (15) donneront habituellement des résultats $\mathfrak{N}$ ou $\mathfrak{T}$ suffisamment approchés des résultats exacts.

» Le plus grand écart, ou la plus grande différence, entre les ordonnées, soit $\mathfrak{N}$, soit $\mathfrak{T}$, des deux surfaces, aura lieu pour les points qui se projettent sur l'origine O, c'est-à-dire pour les valeurs

$$\omega = 0, \quad \varepsilon_1 = 0,$$

relatives à un terre-plein horizontal et à une face de mur verticale. Or l'adoption, dans ce cas extrême, des formules (15), revient à supposer (comme l'a fait Prony, qui a considéré ce seul cas) que le mur est lisse ou sans frottement. L'erreur est favorable à la stabilité. Elle est d'ailleurs moindre, quand ε_1 n'est point nul, que celle de la formule de Français, qui négligeait encore alors le frottement sur la face du mur, tandis que nous attribuons à son coefficient la valeur que fournit pour $\tang\varphi_1$ la deuxième expression (15), valeur qui, comme on voit par le tableau ci-dessus, se *rapproche beaucoup de sa vraie valeur*, supposée $= \tang 45° = 1$ pour peu que ε_1 s'élève à 10 degrés, et y est sensiblement égale de $\omega = 0$ à $\omega = 40°$ quand $\varepsilon_1 = 15$ degrés.

» Les formules (15) de poussée contre un mur soutenant une terre en talus, plus faciles à calculer et surtout offrant une sécurité plus grande que celles (16) qui résultent de la théorie de Coulomb, me paraissent donc mériter la préférence dans les cas où il n'y a pas, entre les inclinaisons ω et ε_1 du terre-plein et du mur, la relation (11) ou (13) qui rend tout à fait exacts les résultats fournis par les deux théories alors concordantes. »

PHYSIQUE. — *Observations relatives à quelques Communications récentes, concernant l'action du magnétisme sur les gaz raréfiés.* Extrait d'une Lettre de **M. A. de la Rive** à M. Jamin.

« ... J'ai lu avec beaucoup d'intérêt la Communication que vous avez faite à l'Académie, dans sa séance du 3 janvier, d'un travail de M. Trève relatif à l'action du magnétisme sur les gaz. Vous savez que je me suis occupé du même sujet, et qu'en particulier j'avais, comme M. Trève, signalé l'action de l'aimant sur les auréoles qui se manifestent autour des électrodes, dans les gaz très-raréfiés traversés par des décharges électriques. Je ne m'étais pas occupé de l'étude des modifications dans les apparences lumineuses et en particulier dans le spectre que détermine l'action du

magnétisme. Mais je suis convaincu, d'après mes recherches, qu'il faut chercher la principale cause de cet effet dans l'augmentation de densité que produit dans la matière gazeuse l'influence de l'aimant sur les courants électriques transmis par cette matière, et que ce n'est point l'effet d'une action directe sur le gaz lui-même.

» Au reste, j'avais montré, dans un Mémoire communiqué à l'Académie en 1863, et dont un extrait a paru dans les *Comptes rendus*, t. LVI, p. 669, que le magnétisme, en agissant sur les courants transmis à travers les gaz raréfiés, contracte la colonne lumineuse et rend ainsi lumineuse la partie obscure du jet qui est voisine de l'électrode négative, effet qui doit être accompagné d'une augmentation de résistance. J'ai pu en effet constater et mesurer cette augmentation de résistance, qui est très-considérable, sur l'air, sur l'azote et sur l'hydrogène. Tous les détails de mes expériences, ainsi que les résultats numériques se trouvent consignés dans mon Mémoire qui a paru *in extenso* en 1863 dans le tome XVII (1re Partie) des *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, p. 86, et dans les *Archives des Sciences physiques*.

» Je regrette que M. Daniel n'en ait pas eu connaissance, quand il s'est occupé du même sujet, en faisant le travail dont il a été donné communication à l'Académie, dans sa séance du 31 janvier. Il aurait vu que j'avais déjà annoncé le principe qu'il a déduit de ses recherches, savoir : que le *magnétisme augmente la résistance du conducteur gazeux que renferme le tube*. Du reste, je continue à m'occuper de cette question, et j'espère faire connaître incessamment les résultats que j'ai obtenus en opérant sur divers fluides élastiques raréfiés. »

« **M. H. Sainte-Claire Deville** fait remarquer qu'il s'est glissé une erreur dans la composition du *Compte rendu* de la dernière séance (p. 256). C'est l'oxygène dissous dans le platine (lequel, comme l'argent, a la propriété de rocher), et non l'hydrogène, qui détermine la production des étincelles au moment où l'on fond le platine. »

RAPPORTS.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Rapport sur le Mémoire présenté à l'Académie le 29 mai 1869 par* M. Tresca, *sur le poinçonnage et sur la théorie mécanique de la déformation des corps solides.*

(Commissaires : MM. Combes, de Saint-Venant, Morin rapporteur.)

« Le Mémoire que M. Tresca a soumis au jugement de l'Académie fait suite à la longue série d'études et d'expériences qu'il a entreprises et poursuivies avec persévérance, de 1863 à 1869, sur les mouvements et les déplacements que des pressions énergiques peuvent produire dans des masses solides, mouvements que l'analogie des formes, des effets apparents et physiques l'a conduit à désigner sous le nom général d'*écoulement des corps solides*.

» Déjà, dans des Mémoires précédents, accompagnés de dessins, qui reproduisaient à l'œil tous les effets obtenus, dont il avait d'ailleurs montré les spécimens eux-mêmes à l'Académie, l'auteur était parvenu, par des méthodes simples de calcul, à formuler les lois géométriques des déplacements des molécules et à résoudre ainsi la partie cinématique de la question.

» Les expressions analytiques auxquelles il était arrivé, à l'aide d'hypothèses basées sur certains faits, avaient été vérifiées par leur concordance avec les résultats de l'expérience sur les effets que produisent, dans l'intérieur des corps solides, des pressions considérables exercées sur leur surface extérieure.

» Pour bien comprendre la nature et la portée des recherches de l'auteur, il importe, dès à présent, d'appeler l'attention sur la différence qui existe entre les effets qu'il a étudiés et ceux qui font l'objet de cette partie de la science qui traite de la résistance des matériaux à l'action des forces extérieures, et qui fournit des bases et des règles à l'art des constructions.

» Dans celle-ci, la science a pour objet d'étudier les effets de la résistance que les molécules des corps, en vertu des forces d'attraction et de répulsion dont elles sont douées, opposent au rapprochement par compression ou à l'éloignement par extension, et de déterminer les limites entre lesquelles ces forces, mises en jeu, conservent leur énergie, ainsi que celles auxquelles elles la perdent en partie ou en totalité.

» Dans les phénomènes étudiés par M. Tresca, les molécules des corps

soumis à des pressions extérieures énergiques parcourent ces deux périodes de l'élasticité, parfaite d'abord, altérée ensuite, puis complétement détruite, et commencent à se déplacer, à obéir à ces pressions, à la manière des liquides, qui ont atteint la limite où ils cessent d'être compressibles. C'est alors que se manifestent les effets d'écoulement des corps solides, sous l'énergie de pressions qui, ayant dépassé les limites de celles qui permettaient l'action des forces d'élasticité, ont atteint une intensité que l'auteur caractérise sous le nom de *pression de fluidité*.

» Cette analogie dans les mouvements produits dans les corps solides par la pression de fluidité, avec ceux qui se manifestent dans les liquides, ne se retrouve pas aussi complétement, quant à la propagation, à la transmission intégrale de son intensité dans les diverses parties de la masse. M. Tresca l'a constaté et signalé dès ses premières recherches; il a montré que pendant la déformation ou l'écoulement, il y avait d'un point à un autre une perte de pression, et qu'il existait, dans chaque cas, une distance au delà de laquelle la pression n'était plus transmise et qui limite ce qu'il nomme la *zone d'activité*.

» Le but de son nouveau Mémoire est précisément de fournir, pour certains cas particuliers, des notions sur l'intensité de la pression de fluidité et sur l'étendue de la zone d'activité.

» La question qu'il traite dans ce Mémoire passe donc du domaine de la géométrie dans celui de la mécanique.

» Les effets qu'il y étudie, plus spécialement, sont ceux que présentent le poinçonnage et l'étampage des métaux; opérations à l'aide desquelles l'industrie parvient à déformer, à modeler, à faire couler à froid les métaux et les matières ductiles, dont les produits présentent en réalité, comme l'Académie a pu le voir par les nombreux spécimens mis sous ses yeux, l'analogie, l'identité les plus frappantes avec les phénomènes de l'écoulement des corps liquides ou mous.

» L'auteur considère un poinçon cylindrique qui pénètre dans un prisme ou dans un cylindre de métal, dans la direction de l'axe de ce corps, en chassant devant lui les molécules qui s'opposent à son passage. Il y reconnaît et il y montre les déplacements latéraux, les remous qui se manifestent dans les liquides, et il y reproduit jusqu'à la formation de cette proue fluide, dont l'existence a été signalée pour la première fois, en ce qui concerne l'eau et l'air (1), par Dubuat, dans ses belles expériences sur la

---

(1) *Principes d'hydraulique*, par Dubuat; 2 vol., p. 331 et 373.

résistance des fluides sans qu'il ait été possible à cet illustre physicien d'en déterminer la forme fugitive, tandis que M. Tresca, opérant sur des solides, a pu la réaliser matériellement.

» Il n'est pas inutile de faire remarquer, dès à présent, que ces expériences et ces recherches scientifiques sur les effets de pénétration, de déplacement des molécules, de transmission et de répartition des pressions, ont une application directe et peuvent conduire à des conséquences immédiatement utiles pour des questions d'une haute importance dans certains services publics, quoique d'une nature en apparence très-différente.

» Ainsi, par exemple, la pénétration des projectiles dans les milieux résistants solides, leur passage à travers les cuirasses des navires, questions si fort à l'ordre du jour pour les sciences militaires, se rattachent directement à des effets du même ordre et suivent les mêmes lois, comme nous le ferons voir plus loin.

» Le Mémoire dont nous rendons compte aujourd'hui à l'Académie est partagé en plusieurs Chapitres qui traitent séparément :

» 1° De la description des faits observés ;

» 2° D'une théorie géométrique de ces effets ;

» 3° De la comparaison des résultats de l'expérience avec ceux de cette théorie ;

» 4° De la loi de variation des pressions que détermine le poinçonnage aux diverses périodes d'enfoncement du poinçon ;

» 5° De la théorie mécanique de la déformation des corps solides, dont les résultats sont comparés à ceux des expériences.

» Il nous serait difficile, pour ne pas dire impossible, sans fatiguer inutilement l'attention de l'Académie, d'analyser même succinctement la description détaillée, accompagnée de tous les dessins originaux et de grandeur naturelle, des résultats et des spécimens des expériences si variées contenus dans ce Mémoire, au texte et aux dessins duquel nous sommes obligés de renvoyer.

» Nous nous bornerons à dire que les précautions les plus minutieuses avaient été prises pour diriger avec précision les poinçons, pour mesurer avec exactitude, non-seulement les dimensions de ces outils, celles des blocs ou des plaques dont ceux-ci se composaient, mais encore les pénétrations de ces poinçons, ainsi que les pressions correspondantes qui les produisaient et qui étaient indiquées par un manomètre parfaitement taré dans des expériences spéciales jusqu'à des pressions de 30000 kilogrammes.

» Les expériences ont été exécutées, soit en faisant pénétrer le poinçon dans des masses solides d'une seule pièce, soit en formant les blocs de plaques superposées.

» Ces masses reposaient, tantôt sur une plaque pleine, tantôt sur une plaque percée d'un trou d'un diamètre précisément égal à celui du poinçon. Dans le premier cas, la pression produisait, en tous sens, un refoulement de la matière analogue à un étampage; dans le second, elle déterminait, en outre, l'expulsion d'un noyau de forme cylindrique, qu'on nomme *débouchure*, et dont la hauteur, variable avec son diamètre et avec celui du poinçon, présente une grande importance pour l'étude des phénomènes.

» Dans une partie des expériences, le bloc était solidement maintenu entre deux plaques de fer bien parallèles; dans d'autres, la surface supérieure était entièrement libre.

» Enfin, dans certains cas, le bloc solide plein était contenu dans une enveloppe cylindrique d'un diamètre supérieur à celui du poinçon, dont l'action produisait cet effet qu'on désigne dans l'industrie sous le nom d'*emboutissage*.

» La conséquence générale et frappante de tous les faits d'observation, c'est que, dans le poinçonnage, les pressions exercées sur le poinçon, et transmises par lui, se propagent dans tous les sens, et que, sous leur action, les molécules solides fuient, à la manière de celles des corps mous et des liquides, dans toutes les directions où elles ne rencontrent pas d'obstacle extérieur solide.

» Ainsi, lorsqu'un bloc cylindrique plein traversé par un poinçon de même forme est maintenu, au moyen d'armatures résistantes, par ses faces inférieure et supérieure, tandis que le reste de sa surface est libre, l'écoulement des molécules se fait dans le sens parallèle à ces faces, au fur et à mesure de l'avancement du poinçon; le solide se renfle à sa surface extérieure, et le maximum d'augmentation de ses diamètres correspond à la hauteur à laquelle le poinçon est parvenu.

» Lorsqu'au lieu d'être d'une seule pièce, le bloc cylindrique est formé de plaques minces superposées, ces effets de déplacement sont rendus manifestes, et la circonférence extérieure de chacune d'elles s'accroît pour permettre l'introduction des molécules refoulées par le poinçon.

» Dans ce cas, l'on reconnaît, d'une manière évidente, que la transmission de la pression verticale ne s'étend pas, au-dessous du poinçon, au delà d'une certaine distance, que l'on peut regarder comme une limite de cette

transmission dans ce sens, variable avec le degré d'avancement de l'outil.

» Les plaques comprises entre cette limite et le dessous du poinçon se relèvent de bas en haut vers leurs bords extérieurs par l'action des molécules qui fuient sous le poinçon.

» Lorsque, au contraire, le bloc plein ou composé de plaques superposées est libre en tous sens et simplement posé sur une surface plane perpendiculaire à la direction du poinçon, les déplacements moléculaires ont lieu dans toutes les directions. La surface supérieure se relève par ses bords et la surface extérieure se dilate.

» Le premier effet est tout à fait analogue à ce qui se produirait sur un liquide ou un corps mou à la surface horizontale duquel pénétrerait un corps tombant verticalement.

» Ces expériences, et les études si bien dirigées de M. Tresca, nous rendent compte des effets remarquables qu'il y a longues années, déjà, l'un de nous avait signalés et constatés de la pénétration des projectiles dans le plomb, et montrent qu'ils étaient dus à cette transmission des pressions dans les corps solides, dont il recherche les lois.

» Si, enfin, un bloc cylindrique est maintenu à la fois par sa base inférieure et par sa surface extérieure dans une enveloppe solide, et si le poinçon a un diamètre très-peu différent de celui de cette enveloppe, la matière comprimée ne pouvant plus s'échapper que par l'intervalle annulaire qui règne entre le poinçon et l'enveloppe, sort sous la forme d'un tube parfaitement calibré, dont la longueur a parfois atteint $0^m,25$ à $0^m,30$ avec un diamètre de $0^m,05$ et une épaisseur de moins d'un cinquième de millimètre.

» Il est difficile de se refuser à reconnaître encore ici l'analogie frappante de ces résultats avec ceux que l'on obtient dans certaines industries où l'on opère sur des matières molles et plastiques, telles que les pâtes alimentaires, les terres glaises; ou sur des métaux fusibles, comme le plomb amené à l'état pâteux pour la fabrication des tuyaux; et bien d'autres que nous pourrions citer.

» Quand la plaque sur laquelle repose le bloc que doit traverser un poinçon, au lieu d'être pleine, est percée d'un trou d'un diamètre exactement le même que celui de cet outil, et parfaitement concentrique à son axe, les effets de la pression, après s'être fait sentir à la partie supérieure du bloc, et avoir produit à peu près toutes les circonstances signalées plus haut, se propagent dans celle qui avoisine l'orifice et y déterminent l'expulsion d'une partie du métal sous forme d'une débouchure cylindrique.

La propagation graduelle et à distance limitée dans l'intérieur de la masse et dans tous les sens des pressions exercées par le poinçon est encore parfaitement manifestée dans les expériences très-nombreuses et très-variées que M. Tresca a exécutées sur ce cas important, par les proportions variables de la hauteur de la débouchure obtenue.

» En exécutant quelques expériences spéciales avec un poinçon à tête hémisphérique, l'auteur a constaté que, dans sa pénétration à travers un bloc de plomb, cette forme de la partie antérieure facilitait le déplacement latéral des molécules solides et diminuait la résistance, de même qu'on l'a observé dans les expériences sur la résistance des fluides au mouvement des corps cylindriques terminés par des proues de divers profils.

» Après avoir étudié sous des formes et dans des conditions variées les effets du poinçonnage du plomb, l'auteur a étendu ses expériences à des alliages plus ou moins ductiles et à d'autres métaux.

» L'alliage de plomb et d'étain par parties égales, entre autres par sa ductilité et son homogénéité, jointes à une plus grande dureté, lui a fourni des résultats complétement d'accord avec ceux du plomb.

» Mais c'est surtout dans les opérations industrielles exécutées en grand, pour étamper, percer et mouler en même temps à froid ou à chaud des plaques, des écrous, des rondelles en fer, qu'il a trouvé des spécimens remarquables de la généralité de la marche des déformations qu'éprouvent les corps solides sous l'action d'efforts énergiques.

» Les produits des grands ateliers de construction de France et d'Angleterre ont été mis par lui à contribution, et dans tous les échantillons qu'il a recueillis, et dont il a réuni les dessins de grandeur naturelle dans son Mémoire, on retrouve des effets du même ordre.

» Parmi les plus curieux, nous devons citer les spécimens d'une fabrication par étampage et par découpage d'écrous en fer formés avec des rondelles d'abord cylindriques, chauffées au rouge blanc, puis étampées dans une matrice hexagonale et poinçonnées simultanément au centre de haut en bas et de bas en haut, et qui fournissent ainsi, d'un seul coup, des écrous hexagonaux, ébauchés et percés, prêts à être terminés par les machines à fraiser et à tarauder; au nombre de ces exemples, on remarque un écrou de 95 millimètres de diamètre sur 60 de hauteur, dont la coupe montre comment, obéissant aux pressions considérables qu'elle a subies, la matière refoulée du centre à la périphérie, s'est écoulée et moulée, en laissant voir les traces irrécusables des mouvements intestins des éléments des couches dont le métal avait été formé.

» Enfin M. Tresca reproduit des résultats de découpages opérés à l'aide de presses hydrauliques à quatre cylindres de MM. Hick et fils, de Bolton, présentées en 1851 à l'Exposition de Londres et de la force de 200 000 kilogrammes. A l'aide de ces puissants engins, l'on a pu découper des rondelles de 76 millimètres de diamètre dans des plaques $0^m,038$, $0^m,051$, $0^m,063$, $0^m,076$ et $0^m,084$ d'épaisseur. En comparant les pressions exercées, évaluées il est vrai par les constructeurs à l'aide des procédés ordinaires et assez peu précis de l'industrie, on trouve que, tant que l'épaisseur ne dépasse pas le diamètre du poinçon, la résistance paraît rester proportionnelle à l'épaisseur des plaques; ce qui est d'accord avec d'autres résultats d'expériences en grand, et avec certains résultats obtenus par M. Tresca sur le plomb, comme nous l'indiquons plus loin.

» La série si complète d'observations sur le poinçonnage des corps solides que nous venons d'analyser se termine par quelques expériences sur les effets analogues qui se produisent, quand on comprime des matières pulvérulentes, telles que du sable fin très-sec. Ces essais ne sont que le prélude de recherches plus étendues que M. Tresca a entreprises, et dont il fera connaître plus tard les résultats. Il s'est borné, dans le Mémoire que nous analysons, à faire voir par une expérience exécutée avec un poinçon de $0^m,130$ de diamètre, sous des pressions qui se sont élevées jusqu'à 17 510 kilogrammes, et dont il a joint à son travail les résultats originaux automatiquement manifestés sur le papier, que les matières pulvérulentes transmettent les pressions, de même que les liquides et les solides, mais avec une perte relativement très-grande d'un point à un autre, et qu'elles subissent les mêmes déformations générales que les matières solides amenées à l'état de fluidité, en montrant le même mode de déplacement et les mêmes proues.

» Après avoir discuté et analysé les effets apparents de la pénétration des poinçons de diverses formes dans les corps solides, M. Tresca s'est occupé de rechercher les lois mathématiques de ces phénomènes si curieux, en partant d'hypothèses basées sur l'observation des faits eux-mêmes, et dont les conséquences pouvaient d'ailleurs se prêter à des vérifications directes.

» On sait que, dès les premières expériences, cet observateur avait constaté que, dans le phénomène de l'écoulement des solides, sous des pressions énergiques, phénomène qui, comme nous l'avons dit plus haut, succède à celui de la compression plus ou moins élastique, la densité des solides ne varie pas. Il a donc pu considérer ce premier point comme acquis à la science.

» Les expériences directes et nombreuses exécutées sur le poinçonnage de blocs de matières diverses, formés à dessein de couches ou de plaques d'épaisseurs égales, ayant montré que les effets des pressions, qui déterminaient l'écoulement latéral de la matière et l'amincissement de la partie de ces plaques comprise sous le poinçon, ne s'étendaient, dans le sens où ils s'exerçaient, que jusqu'à une certaine distance, qu'il a nommée leur *zone d'activité* et au delà de laquelle les plaques conservaient leur épaisseur primitive, M. Tresca s'est cru autorisé à prendre ce second fait d'observation pour l'une des bases de la théorie qu'il se proposait d'établir; sauf, bien entendu, à comparer ensuite les conséquences auxquelles il pouvait être conduit avec les déformations effectivement subies par les corps.

» Telles sont les deux hypothèses fondamentales, vérifiées, on pourrait le dire *à priori*, par les faits, que cet observateur a employées. Il y a joint, comme dans son Mémoire de 1864, la supposition, justifiée d'ailleurs approximativement par quelques autres faits, que les lignes matérielles verticales restent constamment verticales, que les lignes matérielles horizontales restent horizontales, aussi longtemps qu'elles ne sortent pas chacune des trois parties dans lesquelles il divise le bloc, savoir : le cylindre plein central et les portions du cylindre évidé ou annulaire qui l'enveloppe.

» Avec l'aide de ces hypothèses il soumet au calcul d'abord la loi de variation des couches dont les blocs poinçonnés peuvent être considérés comme composés, et ensuite les déformations extérieures éprouvées par des blocs cylindriques traversés à divers degrés par des poinçons de différents diamètres.

» La première recherche dans laquelle il a successivement étudié les effets de la pénétration de poinçons cylindriques à tête plane dans des blocs de même forme, d'épaisseurs diverses par rapport à l'étendue de la zone verticale d'activité des pressions, l'a conduit, quant à la loi de la variation des épaisseurs des plaques en deçà de cette limite et à leur constance au delà, à des conséquences très-approximativement d'accord avec tous les faits observés, à savoir : que, *dans l'étendue de cette zone, les épaisseurs, égales entre elles à l'origine, le sont encore à un instant quelconque et varient suivant une loi logarithmique, tandis qu'au delà de cette zone elles restent invariables.*

» Il a étudié ensuite les déformations successives de la forme extérieure qu'éprouvent des blocs cylindriques soumis au poinçonnage, selon que leur hauteur est inférieure, égale ou supérieure à l'étendue de la zone d'activité de transmission des pressions, et il en a déterminé les équations d'après le degré d'avancement ou de pénétration du poinçon.

» La courbe du profil extérieur des blocs varie avec ces données, et est tantôt celle d'une parabole, celle d'une ligne droite et devient celle d'une logarithmique, qui a pour asymptote la base même du bloc, quand le poinçon pénètre jusqu'à cette base.

» L'examen de ceux des blocs formés de plaques indépendantes et d'égale épaisseur que M. Tresca a mis sous les yeux de l'Académie montre que les courbes théoriques représentent assez bien l'ensemble des déformations produites, et il en est de même des blocs pleins, dans lesquels le poinçon n'avait pénétré que sur une partie de leur hauteur.

» Au sujet de la forme cylindrique que conserve en s'élargissant le bloc poinçonné, à partir du moment où la résistance éprouvée par le poinçon a atteint sa valeur constante, nous ferons remarquer qu'elle indique évidemment que la pression transmise à cette surface extérieure est égale sur toute son étendue.

» Or, comme celle qui est développée à l'intérieur sur la surface du cylindre central correspondant au poinçon dans la hauteur de la zone d'activité est aussi égale sur tous les points de cette surface, il s'ensuit qu'en décroissant, de proche en proche, du centre à la circonférence, les pressions transmises sur toutes les surfaces des cylindres concentriques qui constituent le bloc sont uniformément et également réparties comme dans les liquides. C'est d'ailleurs ce que l'auteur démontre plus loin, par des considérations directes.

» Mais nous lui avons demandé de faire une expérience plus décisive, en opérant sur un bloc cylindrique plein, d'une hauteur supérieure au double de l'étendue de la zone d'activité, et en y faisant pénétrer le poinçon jusqu'à la base de ce bloc, afin de reproduire sur un même échantillon toutes les phases des phénomènes qu'il a étudiés et discutés en détail.

» Le poinçonnage d'un bloc de cuivre qu'il a récemment exécuté répond très-bien à la forme annoncée, et doit être cité en particulier, parce que ce métal présente des contours plus nets et plus faciles à mesurer en tous leurs points.

» Les considérations à l'aide desquelles on détermine d'une manière suffisamment approchée les transformations des génératrices extérieures du bloc, s'appliquant évidemment aux génératrices du cylindre central et de toutes les autres couches cylindriques, concentriques intérieures, l'auteur en a facilement déduit les équations de ces transformées.

» En même temps qu'une partie des molécules solides déplacées par le poinçon s'écartent de l'axe du bloc dans le sens perpendiculaire à cet axe,

d'autres se rapprochent de la base de ce bloc, et, quand le métal est ductile, les unes et les autres sont reliées par des surfaces de raccordement très-continues, en forme de dés, dont les expériences manifestent l'existence.

» L'auteur a déterminé la loi de génération de ces surfaces, en s'appuyant toujours sur la condition fondamentale de l'invariabilité du volume du bloc, et sur les lois trouvées précédemment de la transformation des génératrices du cylindre central et de la variation d'épaisseur des couches horizontales sous le poinçon.

» Nous ferons remarquer à ce sujet que l'existence de ces surfaces de raccordement, qui se déchirent à mesure que la débouchure sort, explique très-bien comment, dans cette période de poinçonnage, la résistance doit être proportionnelle à l'épaisseur de la partie cisaillée, et varier avec elle, ainsi que nous aurons plus loin l'occasion de le vérifier.

» Pour comparer les résultats des formules théoriques à l'aide desquelles il a cherché à représenter la loi de la variation d'épaisseur ou de répartition après le poinçonnage des couches situées sous le poinçon et qui étaient primitivement équidistantes, M. Tresca a eu recours aux résultats des expériences qu'il a exécutées sur des blocs composés de plaques d'égale épaisseur, superposées les unes aux autres. En déterminant, d'abord par les formules qu'il a établies, puis sur les échantillons mêmes qu'il a mis sous les yeux de l'Académie, les rapports observés entre les distances primitives de chacune de ces couches à la base du bloc et la limite de la zone d'activité donnés par la longueur des débouchures et ceux des distances des mêmes couches, au moment où la débouchure apparaît à la même limite, il a pu construire des courbes dont l'une représente la relation théorique, et les autres la relation expérimentale de ces rapports.

» La courbe théorique, qui est une logarithmique pour les couches situées à une distance de la base du bloc plus grande que la limite d'activité, devient une ligne droite pour celles qui sont plus rapprochées de cette base.

» Dans un cas comme dans l'autre, les tracés faits à une grande échelle montrent que les valeurs des rapports calculés et de ceux qui ont été déterminés par les mesures directes suivent une marche commune, dont la courbe théorique paraît représenter l'ensemble d'une manière satisfaisante. L'erreur relative de ces valeurs ne s'élève en moyenne qu'à 0,053, toutes les fois que l'épaisseur totale du bloc ne dépasse pas 2,5 fois le diamètre

du poinçon, et elle n'atteint 0,10 que quand cette épaisseur dépassant trois fois le diamètre du poinçon, le frottement de la tige acquiert alors une influence de plus en plus grande, dont il n'a pas été possible de tenir compte jusqu'ici.

» En appliquant les mêmes considérations aux déplacements que produit un poinçon introduit dans un bloc maintenu par une enveloppe cylindrique, M. Tresca trouve les équations des transformées, des génératrices parallèles à l'axe et celles des couches horizontales, ainsi que la trajectoire d'un point donné de la masse, en faisant toutefois remarquer que les déplacements étudiés sont considérés simplement au point de vue cinématique, et en supposant qu'ils ont lieu sans vitesse appréciable.

» *Mesure des pressions qui déterminent le poinçonnage.* — Nous avons dit plus haut qu'à l'aide d'un manomètre directement taré l'auteur avait pu mesurer avec précision les pressions exercées par le poinçon à chaque instant de sa pénétration, et qu'en représentant graphiquement les résultats de ces observations, il avait rendu visible la loi de variation de ces pressions.

» Ces observations des pressions ont été faites avec le plus grand soin à mesure que la pénétration du poinçon croissait de millimètre en millimètre, sur du plomb, sur un alliage de plomb et d'étain, sur du zinc, sur du cuivre et sur du fer.

» Les formes de toutes les courbes ainsi obtenues montrent que ces efforts croissent d'abord très-rapidement, et qu'ils arrivent promptement à un maximum auquel ils se maintiennent d'autant plus longtemps que la zone d'activité est plus petite par rapport à la hauteur du bloc; dans le cas où il existe une contre-matrice, cette constance se manifeste jusqu'au moment où la débouchure commence à paraître, et la hauteur de celle-ci fournit une mesure directe de la zone d'activité, qui dépend d'ailleurs aussi du diamètre du poinçon et de celui du bloc, comme l'auteur le montre plus loin, par les considérations théoriques sur lesquelles nous reviendrons tout à l'heure.

» Cette constance de la pression que le poinçon exerce pendant qu'il pénètre dans l'intérieur du solide étant ainsi bien constatée pour tous les cas où la hauteur de celui-ci dépasse une certaine limite, M. Tresca a pu légitimement l'admettre, comme l'une des bases des considérations à l'aide desquelles il a cherché à établir la théorie mécanique des effets qu'il étudiait.

» Dans la crainte de donner à ce Rapport, déjà fort long, un développe-

ment trop étendu, nous nous bornerons à ce qui précède, relativement à la mesure des pressions, et nous renverrons au Mémoire de l'auteur pour tout ce qui concerne les faits très-curieux et très-importants qu'il a observés dans le poinçonnage des blocs pleins ou des blocs formés de plaques superposées, renfermés ou non dans des enveloppes cylindriques.

» *Théorie mécanique de la déformation des corps solides.* — Après avoir décrit avec soin les effets de déformation, qui se manifestent dans le poinçonnage des corps solides, soit quand le poinçon n'y détermine qu'une compression sans découpage, soit quand il y produit l'écoulement d'un jet ou d'une débouchure par l'orifice d'une contre-matrice, soit enfin quand le solide est renfermé dans une enveloppe résistante qui ne permet l'écoulement que par un intervalle annulaire supérieur et après avoir étudié les lois géométriques des déformations produites par des actions lentes qui ne communiquent pas aux molécules des vitesses appréciables, M. Tresca aborde l'importante et délicate question de la consommation du travail mécanique nécessitée par ces déformations.

» Il rappelle d'abord, comme nous l'avons déjà dit en commençant, que les effets qu'il se propose d'étudier sont consécutifs aux périodes d'élasticités parfaite ou imparfaite, dans lesquelles les corps soumis à des efforts de compression ou d'extension sont encore susceptibles, quand l'action motrice cesse d'agir, de revenir plus ou moins complétement à leur forme primitive. Dans la première de ces deux périodes, qui fait l'objet principal des recherches des ingénieurs sur la résistance des matériaux, la déformation par compression ou par extension est proportionnelle à l'action motrice, conformément à l'expression de Hooke (*ut tensio sic vis*), qui le premier, croyons-nous, a posé ce principe.

» Dans la seconde, les déplacements moléculaires croissent plus rapidement que la force qui les produit. Pendant l'une et l'autre de ces périodes, les distances des molécules varient, ainsi que les volumes des corps et les efforts qui produisent ces variations sont des fonctions des distances des éléments matériels.

» Au contraire, dans les effets que l'auteur a étudiés, l'expérience montre que les volumes restent constants, quelles que soient les déformations, tant que la désagrégation ou la rupture n'apparaissent pas, et pour les matières ductiles, telles que le plomb, l'étain, qui se déforment presque indéfiniment sous l'action de certaines pressions, il paraît naturel d'admettre que la résistance qu'ils opposent reste la même par mètre carré pour toute extension et toute compression ultérieure.

» C'est en partant de cette hypothèse et en se basant aussi sur l'invariabilité du volume, constatée par l'expérience, que l'auteur, en se bornant aux cas où les déplacements ont lieu sans vitesses appréciables, a cherché à établir des formules qui expriment, en fonction d'un coefficient constant de résistance par mètre carré à la fluidité, les quantités de travail qu'exigent les déformations dont il a fourni des exemples, et qu'en introduisant ensuite dans ces mêmes formules les données numériques des expériences, il est parvenu à obtenir des valeurs approximatives de ce coefficient de résistance à la fluidité pour le plomb, pour l'étain, pour le fer et pour quelques autres matières.

» En appliquant en premier lieu ces considérations à la recherche de la quantité de travail nécessaire pour déformer dans tous les sens un parallélépipède dont la surface extérieure est libre, M. Tresca établit d'abord ce théorème important que :

» *Le travail total de déformation est mesuré par le double du travail développé dans la seule direction pour laquelle le changement de dimension est de signe contraire aux deux autres.*

» Il montre ensuite comment l'effort nécessaire pour produire, par exemple, une déformation longitudinale pourra se calculer facilement, quand on connaîtra le coefficient de résistance à la fluidité de la matière que l'on considère.

» Il parvient aux mêmes conséquences en examinant les diverses circonstances de déformation auxquelles peut être soumis un cylindre dans le sens de son axe et dans celui de ses rayons, et il établit le théorème suivant, auquel il a soin cependant d'indiquer que certaines déformations peuvent faire exception :

» *Un cylindre homogène, à base circulaire, constitue un solide qui jouit de la propriété de permettre à toutes les files de molécules qui le composent de se déformer absolument comme si elles étaient isolées, et le travail de déformation s'obtient en multipliant, par le coefficient constant* K *de résistance à la fluidité, la somme du volume abandonné et du volume envahi par le cylindre.*

» On comprend de suite qu'à l'inverse, l'examen et la mesure des déformations produites dans des cylindres par des pressions connues, exactement mesurées, à l'aide de manomètres bien tarés, peuvent permettre de reconnaître si le coefficient K de la résistance est effectivement constant ou à peu près pour un même corps, ce qui justifierait les bases de la théorie proposée.

» *De la transmission des pressions à l'extérieur des solides renfermés dans des*

enveloppes. — Pour le cas où il s'agit d'un solide tel qu'un cylindre comprimé par une pression exercée sur sa base, et qui, au lieu d'être libre, est renfermé dans une enveloppe résistante, l'auteur parvient à cette conséquence remarquable que : *déduction faite des résistances provenant de la résistance propre de la matière à la déformation par fluidité, les pressions extérieures se transmettraient, dans ce cas particulier, sur toute l'étendue des parois latérales de l'enveloppe avec la même intensité par mètre carré*, ainsi que cela a lieu pour les liquides, dont la résistance de fluidité peut être regardée comme nulle.

» Quoique cette conclusion, établie plus haut comme conséquence de la forme cylindrique conservée par les blocs, soit d'accord avec les phénomènes déjà observés, et vérifiée par la constance souvent très-remarquable du coefficient K de résistance introduit par l'auteur dans sa formule, on comprend de quelle importance serait sa vérification expérimentale directe. Nous ne la croyons pas impossible, même pour des pressions assez limitées.

» Si, par exemple, l'enveloppe était formée par un cylindre mince en acier solidement cerclé à ses bases supérieure et inférieure, et si, par des expériences préalables, on avait déterminé les formes qu'il prendrait sous l'action de pressions connues, exercées sur un liquide qui y serait contenu, cet appareil constituerait une sorte de dynamomètre tubulaire, dont les gonflements extérieurs, exactement relevés, pourraient ensuite servir à déterminer les pressions transmises par la surface extérieure des solides, que l'on y comprimerait, au delà de la limite de résistance à la fluidité.

» On remarquera que la pression motrice extérieure pouvant être, à volonté, très-peu supérieure à celle qui correspond à cette limite, les efforts exercés intérieurement seraient alors assez faibles pour que l'appareil eût la sensibilité désirable.

» Nous espérons que l'auteur pourra parvenir à réaliser cette expérience, qui nous semble propre à justifier directement la théorie ingénieuse et très-acceptable qu'il a établie à l'aide d'hypothèses basées d'ailleurs sur l'observation des faits.

» *Travail de déformation d'un anneau cylindrique libre dont le rayon extérieur est constant.* — Dans ce cas, où l'anneau ne peut être déformé que par l'action d'une pression longitudinale ou par celle d'une pression intérieure, l'auteur arrive à cette conséquence que : *pour produire une même déformation, les pressions à exercer par unité de surface doivent être les mêmes dans les deux sens.*

» Il parvient à la même conclusion lorsque, dans le même cas, il y a lieu de tenir compte d'une résistance extérieure.

» *Travail d'extension d'un anneau cylindrique dont la hauteur est assujettie à rester constante.* — En considérant ce cas particulier, qui est relatif aux cylindres soumis à l'action de pressions intérieures, et en cherchant à déterminer la loi de variation des pressions transmises dans l'épaisseur de l'anneau, M. Tresca arrive à cette conséquence que : *la pression va dans ce cas en augmentant depuis la circonférence extérieure, où elle est nulle, jusqu'à la circonférence intérieure où elle atteint son maximum, en suivant une loi logarithmique dont il donne l'expression.*

» Les considérations théoriques dont on vient d'indiquer les conséquences sont relatives à des cas de poinçonnage sur lesquels l'auteur a précisément recueilli un assez grand nombre de faits d'observation pour lui permettre d'établir la comparaison des résultats des formules avec ceux de l'expérience.

» En effet, dans l'action du poinçonnage avec enveloppe cylindrique, on a produit simplement la déformation d'un cylindre dont le rayon extérieur reste constant; et, dans le cas du poinçonnage d'un bloc contenu entre deux plaques perpendiculaires au poinçon et sans enveloppe avec ou sans contre-matrice, on a réalisé, en outre, le cas d'un anneau cylindrique dont la hauteur est assujettie à rester constante, tandis que la surface extérieure s'étend.

» En introduisant, dans les formules qui expriment la pression exercée en fonction des dimensions, du bloc, du poinçon et du coefficient K de résistance de la matière à la fluidité, les données de l'expérience, l'auteur a donc pu reconnaître si les valeurs qu'il en déduisait pour ce coefficient étaient, en effet, constantes ou à peu près.

» L'on ne saurait dans de pareilles recherches, sur un sujet aussi neuf, s'attendre à des résultats d'une concordance parfaite, et c'est sans doute déjà avoir fait faire à la question des progrès très-considérables que d'avoir établi de ces effets une théorie qui représente avec une certaine exactitude d'ensemble les faits de l'observation.

» Les résultats de cette comparaison pour les poinçonnages faits dans des blocs de plomb pleins, avec ou sans enveloppe, les seuls qui soient susceptibles de fournir des éléments assez nombreux d'appréciation, sont réunis dans le tableau suivant :

		DIAMÈTRE des blocs 2R.	DIAMÈTRE du poinçon $2R_1$.	VALEUR du coefficient K par centimètre carré.	MOYENNE.	
Cylindre avec enveloppe concentrique		0,0370	0,010	154 kg	184	
		0,0370	0,020	160		
		0,0370	0,030	247		
Cylindre sans enveloppe.	Sans contre-matrice	0,052	0,010	175	204	Bloc de 20 plaques.
		0,065	0,020	254		Bloc de 8 plaques.
		0,060	0,040	183		Bloc plein.
	Poinçons à base plane	0,052	0,010	202	202	
		0,060	0,020	202		
	Poinçons avec proues sphériques	0,100	0,030	231	215	
		0,100	0,040	198		
		0,100	0,050	168		
		Moyenne générale			201	

» On voit par ces résultats que, malgré des différences parfois assez notables dans les valeurs obtenues dans chacune des séries d'expériences, les valeurs moyennes du coefficient de résistance du plomb à la fluidité s'écartent peu de 201 kilogrammes par centimètre carré, ou d'environ 200 atmosphères.

» Des applications semblables ont donné, pour l'alliage de plomb et d'étain,

$$K = 352 \text{ kilogrammes},$$

ou environ 350 atmosphères.

» L'application des considérations analogues aux phénomènes d'écoulement d'un bloc cylindrique en plomb composé de plaques minces par un orifice concentrique à son axe conduit aux résultats suivants :

Diamètre du bloc.	Diamètre du poinçon.	Valeur du coefficient K par centimètre carré.	Moyenne.	
0,100	0,020	158 kg	144 kg	Blocs composés de plaques minces.
0,100	0,030	141		
0,100	0,040	135		

» La division du plomb en plaques minces et nombreuses a dû évidemment, dans ce cas, diminuer la résistance à l'écoulement et explique l'infériorité de sa valeur.

» Lorsque la pression, au lieu de produire un écoulement par un orifice, détermine simplement l'écrasement du bloc et le gonflement de sa surface extérieure, il est facile de voir que l'effort à exercer sur sa base supérieure varie en raison inverse des hauteurs successives auxquelles il est réduit, et, en appliquant aux résultats des expériences la formule fort simple à laquelle il est parvenu, M. Tresca trouve pour ce cas et pour des blocs de plomb les valeurs suivantes du coefficient K :

Diamètre primitif du bloc.	Diamètre final du bloc.	Hauteur primitive du bloc.	Hauteur finale du bloc.	Valeur du coefficient K par centimèrre carré.	
m	m	m	m	kg	
0,0595	0,0780	0,0545	0,0390	118,00	
0,0600	0,0760	0,0600	0,0380	116,00	
0,0600	0,0712	0,0600	0,0450	129,00	Blocs pleins.
	0,0900		0,0300	124,50	
0,0600	0,1030	0,0600	0,0300	148,50	
0,0600	0,0885	0,0600	0,0310	150,00	6 plaques.
0,0600	0,1100	0,0630	0,0185	127,50	20 plaques.
		Moyenne générale		130,50	

» Le plomb offrirait donc à l'écrasement des blocs pleins ou composés de plaques, une résistance de fluidité de $130^{kg},50$ ou 130 atmosphères environ par centimètre carré, très-inférieure, par conséquent, à celle sous laquelle les pierres ordinaires employées dans les constructions commencent à s'écraser, ce qui justifie l'usage où l'on est dans les expériences sur la résistance de ces derniers matériaux, d'en garnir les surfaces supérieure et inférieure des lames de plomb, pour assurer la répartition des pressions d'épreuve.

» Les expériences sur l'étain ont fourni, dans les mêmes conditions, pour le coefficient K la valeur $K = 273$ kilogrammes par centimètre carré.

» En récapitulant toutes les valeurs moyennes obtenues pour le plomb dans les différentes séries d'expériences exécutées de 1863 à 1869, pour le coefficient constant K de résistance à la fluidité, M. Tresca en forme le tableau suivant :

Mode de déformation.	Valeur du coefficent K de résistance à la fluidité, par centimètre carré.
	kg
Écrasement des cylindres	130,50
Écoulement par un orifice concentrique	144,00
Poinçonnage avec enveloppe cylindrique	184,00
Poinçonnage avec contre-matrice	202,00
Poinçonnage sans contre-matrice	204,00

» Toutes les expériences dont on vient de résumer les résultats ont occupé l'auteur pendant près de six années, et les faits si variés et si nouveaux qu'elles ont manifestés, en se présentant successivement, l'ont conduit à envisager la question d'abord sous des points de vue très-différents. Ce n'est que dans les derniers temps qu'en cherchant à les étudier à celui de la théorie mécanique des effets, il a été amené à les lier par les formules dont on vient de faire connaître les conséquences et l'accord général avec l'observation.

» Peu satisfait cependant de cet accord d'ensemble, M. Tresca a voulu, par des expériences spéciales, faites en vue de vérifier l'exactitude des considérations théoriques qui l'avaient guidé, s'assurer avec plus de sûreté de leur concordance avec les faits.

» Il a, en conséquence, répété des expériences analogues, dans des conditions plus uniformes, en opérant sur des blocs de plomb pleins dont voici les dimensions :

Blocs.			
Diamètre.	Hauteur.	Poinçons.	Orifice.
m	m	m	m
0,037	0,023	0,020	0,0125
0,100	0,100	0,050	0,050.

» Le tableau suivant contient les résultats de l'introduction de ces données dans les formules:

	Valeurs du coefficient K.		
	1869.		
Mode de déformation.	Blocs de $0^m,037$ de diamètre.	Blocs de $0^m,100$ de diamètre.	Résultats moyens antérieurs à 1869.
	kg	kg	kg
Écoulement concentrique..............	198	201	144
Poinçonnage avec enveloppe cylindrique..	176	221	184
Poinçonnage avec contre-matrice........	190	211	202
Poinçonnage sans contre-matrice........	190	211	204
Moyennes.....	188,5	211,0	183
	200^{kg}.		

» L'accord des résultats fournis par les quatre séries d'expériences de vérification exécutées en 1869 entre eux, et même avec ceux des séries antérieures, montre qu'en définitive les hypothèses et les faits d'observation qui ont servi de base à l'auteur pour établir la théorie mécanique de la déformation des corps solides, parvenus à l'état de fluidité sous l'action de pressions suffisantes, sont au moins tellement voisines de la vérité, que les lois qu'il en a déduites peuvent être regardées comme représentant l'en-

semble des phénomènes remarquables sur lesquels il a le premier appelé l'attention des mécaniciens et des physiciens.

» *Résultats des observations sur le cisaillement produit par les poinçons.* — Ces vérifications des considérations qui ont guidé l'auteur dans la théorie précédente ne sont pas les seules que les expériences de poinçonnage lui aient fournies.

» Les circonstances que présente le cisaillement qui se produit, quand le poinçon commence à expulser la débouchure, l'ont conduit à des résultats non moins remarquables.

» Si l'on se reporte à ce qui a été dit précédemment de la marche des effets produits par un poinçon qui pénètre dans un solide posé sur une plaque percée d'une contre-matrice, on se rappellera que le mouvement peut être partagé en deux périodes très-distinctes.

» Dans la première, la résistance opposée par la matière pénétrée croît d'abord très-rapidement et atteint bientôt une valeur constante : c'est ce que manifestent les courbes qui représentent les pressions observées. Sous l'action du poinçon, les molécules déplacées s'écartent latéralement, les dimensions transversales du solide s'accroissent seules, et, pendant toute la première période, la débouchure n'apparaît pas encore à l'orifice de la contre-matrice.

» La seconde période commence à l'instant même où la débouchure se manifeste à cet orifice par une légère protubérance. A partir de ce moment, l'effet du poinçon, au lieu de consister dans un refoulement latéral de la matière, devient un cisaillement, et la résistance qu'éprouve le poinçon à l'origine de ce découpage doit être évidemment égale à la valeur constante de celle qui s'opposait à sa marche dans la première période.

» Il est d'ailleurs évident aussi qu'à mesure que la débouchure sort, la résistance au cisaillement diminue graduellement.

» Il est alors très-logique d'admettre qu'au moment où le cisaillement commence, l'effort que le poinçon exerce est proportionnel à la surface annulaire de séparation et à un certain coefficient constant exprimant la résistance au cisaillement par mètre carré.

» Or, l'observation des pressions exercées à chaque position du poinçon donnant la valeur de la résistance totale, il a été facile à l'auteur de déduire de ses expériences la valeur de ce nouveau coefficient constant de résistance, et de faire voir qu'il est précisément égal à celui de fluidité, dont il retrouve ainsi la valeur par l'observation des débouchures produites par le poinçonnage; ce qui lui fournit une nouvelle vérification des considérations théoriques qu'il a exposées dans son Mémoire.

» Enfin, cette égalité constatée des deux résistances à l'instant où la débouchure apparaît lui permet d'éliminer de la relation qui l'exprime les deux coefficients constants, et d'obtenir de la longueur L de la débouchure une expression logarithmique, qui ne renferme que les rayons R du bloc et R_1 du poinçon, et qui est

$$L = R_1\left(1 + \log\frac{R}{R_1}\right),$$

laquelle est indépendante de la hauteur du bloc et de la nature de la matière dont il est composé.

» Dès l'époque de la présentation de son Mémoire, l'auteur avait déjà fourni une vérification expérimentale de la première de ces conséquences par des observations spéciales faites sur des blocs cylindriques en plomb, de $0^m,023$ et de $0^m,100$ de hauteur, percés respectivement par des poinçons de $0^m,020$ et de $0^m,050$ de diamètre.

» Mais la seconde conséquence, relative à la nature de la matière, nous a paru tellement importante et remarquable que nous l'avons prié d'étendre les observations à des matières solides très-diverses pour la justifier. C'est ce qu'il s'est empressé de faire, et les résultats de plus de quarante expériences exécutées sur de la cire à modeler, sur des pâtes céramiques à divers états de mollesse, sur du plomb, sur de l'étain, sur du cuivre et sur du fer, l'ont conduit à la vérification complète de la loi qu'indique la théorie qu'il a établie.

» En comparant les longueurs des débouchures observées à celles que le calcul fournissait, il a trouvé pour valeur moyenne de ce rapport 1,020.

» La cire à modeler a fourni celle de 0,925, le plomb 0,994, l'étain 1,048, le cuivre 1,147, le fer 1,017.

» La représentation graphique des résultats de la formule et de ceux des expériences montre également avec évidence l'accord de la théorie et de l'observation.

» L'ensemble de ces recherches a en même temps conduit M. Tresca aux valeurs suivantes du coefficient de fluidité, qui est aussi celui de résistance au cisaillement par mètre carré.

» Ces valeurs sont pour :

Le plomb......................	1820000^{kg}
L'étain pur....................	2090000
L'alliage de plomb et d'étain.......	3390000
Le zinc.......................	9000000
Le cuivre......................	18930000
Le fer........................	37570000

» Au sujet de ce chiffre de la résistance du fer à la fluidité et au cisaillement à faible vitesse, nous croyons devoir faire observer qu'il s'accorde d'une manière remarquable avec la valeur trouvée pour le cisaillement par M. Fairbairn, et qui est pour les tôles 38090000 kilogrammes.

» Enfin nous ne terminerons pas l'examen de ces considérations relatives au cisaillement des blocs de plomb par des poinçons cylindriques, sans ajouter que la loi de résistance vérifiée par les expériences de M. Tresca est parfaitement d'accord avec celle que l'un de nous avait admise pour la résistance des plaques de blindage des bâtiments cuirassés à la pénétration par les projectiles de tous les calibres, animés des plus grandes vitesses, et qui a été vérifiée par les nombreuses expériences de tir exécutées à Schœburyness, par l'artillerie anglaise.

» Tant il est vrai que les lois qui régissent les phénomènes physiques ou mécaniques sont uniformes et générales.

» Le Mémoire que nous avons été chargés d'examiner se termine par des conclusions qui résument d'une manière très-claire les conséquences que l'on peut tirer, tant des faits observés, que des considérations théoriques qui y sont exposées.

» En ce qui concerne les effets apparents, ces conséquences, rendues évidentes par l'examen des nombreux échantillons d'expériences présentés à l'appui, jettent un grand jour sur le mode du déplacement des molécules des corps solides soumis à l'action d'efforts énergiques transmis par un poinçon ou par tout autre organe analogue qui y pénètre.

» Quant à l'accord des résultats d'observations et de mesures fournies par les expériences elles-mêmes avec ceux des considérations théoriques développées dans ce Mémoire, il est assez satisfaisant pour qu'il soit permis de considérer, dès à présent, les études de l'auteur, sinon comme une solution complète qu'il ne se flatte pas encore d'avoir trouvée, au moins comme un progrès capital fait dans la connaissance, encore si imparfaite, du mode de transmission des efforts, des pressions et du travail dans les corps solides.

» *Conclusions.* — En conséquence, vos Commissaires, appréciant toute l'importance que peuvent avoir, pour les progrès de la théorie mécanique et physique des actions moléculaires, les persévérantes recherches de M. Tresca, vous proposent d'ordonner l'impression de son Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité; par* **M. DE SAINT-VENANT.**

« M. Tresca, dans son Mémoire sur le poinçonnage des métaux et sur la théorie mécanique de la déformation *permanente* des solides doués de ductilité, que l'Académie vient d'approuver, me semble avoir très-heureusement posé les bases de cette théorie toute nouvelle, quoiqu'il n'eût à sa disposition, pour en confirmer l'établissement, que des expériences qu'il reconnaît n'être pas encore assez spéciales pour ce but, et une analyse cinématique des déplacements moléculaires ne pouvant fournir qu'une approximation dont les limites sont inconnues.

» Il m'a donc semblé utile de montrer que le plus remarquable peut-être des résultats de ses recherches, savoir : l'égalité ($K' = K$) du coefficient de la résistance au cisaillement ou glissement transversal au coefficient de la résistance à l'extension ou à la compression permanente, était susceptible d'une vérification complétement théorique.

» Soit, en effet, un parallélépipède rectangle de matière ductile, de longueur a, d'épaisseur b (dimensions l'une et l'autre horizontales pour fixer les idées) et de hauteur c. Supposons que sur ses bases inférieure et supérieure ab l'on exerce, en sens opposés, des frottements énergiques pour les faire glisser l'une devant l'autre, dans la direction de la longueur a, d'une quantité linéaire

$$\mathrm{g}.c;$$

en sorte que g représente leur glissement relatif rapporté à l'unité de la distance mutuelle de ces deux bases, ou la tangente du petit angle dont on fait incliner ainsi les arêtes verticales c du prisme. Supposons aussi que la matière soit arrivée (comme le plomb, le cuivre, etc., des expériences tant d'*écoulement* que de poinçonnage de M. Tresca) à cet état où l'élasticité est, comme on dit, dépassée, en sorte que l'effort est devenu constant ou ne croît plus avec les déplacements. Si K' est l'effort ou frottement longitudinal exercé par unité de surface sur les bases ab, son travail, pour le glissement relatif produit g, aura été en tout

$$2K'ab.\mathrm{g}\frac{c}{2} = K'.abc.\mathrm{g},$$

ou, par unité de volume,

$$K'\mathrm{g}. \tag{1}$$

» Or il est facile de voir que, dans le solide, chaque carré matériel dont les côtés sont respectivement parallèles à a et à c, aura l'une de ses deux diagonales allongée, et l'autre accourcie, dans la proportion

$$\frac{1}{2}g;$$

c'est-à-dire (comme il a été dit ailleurs depuis longtemps) qu'un glissement dans une direction déterminée quelconque équivaut à une dilatation et à une contraction simultanées et moitié moindres dans deux directions rectangulaires, inclinées de 45 degrés sur celle-ci.

» Supposons donc que, dans le parallélépipède donné abc, l'on en taille un plus petit, de même épaisseur b, mais de longueur a' et de hauteur c', faisant 45 degrés avec a et c, et ayant ses faces latérales $a'c'$ dans les plans de celles ac. Pour augmenter sa longueur a' et diminuer sa hauteur c', il faudra, si K représente le coefficient constant de résistance à l'extension ou à la compression pour la matière supposée arrivée à cet état d'annulation de l'élasticité que M. Tresca compare à la fluidité, il faudra, dis-je, appliquer sur ses bases bc', en sens opposés, des tractions

$$K.bc',$$

et, sur ses bases ba', des pressions

$$K.ba',$$

qui, si la proportion de l'extension et celle de la compression sont, comme on vient de dire,

$$\frac{1}{2}g,$$

produiront des quantités de travail

$$K.bc'.\frac{1}{2}ga' \quad \text{et} \quad K.ba'.\frac{1}{2}gc',$$

ou, au total, par unité du volume $a'bc'$ du petit prisme, un travail

$$Kg. \tag{2}$$

» Cette quantité (2) doit être égale à celle (1) $K'g$: car, en décomposant le prisme entier abc en prismes $a'bc'$, le travail total, pour une même déformation opérée, doit être d'égale grandeur pour ceux-ci ensemble et pour celui-là. Donc on doit avoir

$$K' = K, \tag{3}$$

ou l'égalité, expérimentalement découverte par M. Tresca, du coefficient

de résistance au glissement ou cisaillement, et du coefficient de résistance à la déformation permanente par extension ou compression.

» Ce raisonnement me paraît, aussi, justifier l'hypothèse, hardie au premier aperçu, mais, en y réfléchissant, très-rationnelle, de l'égalité des résistances à l'extension et à la compression permanente, par unité superficielle des bases des prismes qu'on y soumet; bien entendu, sous la condition générale, que tout ceci suppose remplie, de mouvements excessivement lents, ou tels que leur vitesse n'entre pour rien dans les résistances aux déformations qu'ils produisent (*). »

MÉCANIQUE ET ANALYSE. — *Rapport sur cinq Mémoires de* M. Félix Lucas *intitulés :* Recherches concernant la Mécanique des atomes, *présentés les* 20 *juillet*, 5 *octobre*, 16 *et* 23 *novembre et* 1er *décembre* 1868.

(Commissaires : MM. O. Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur.)

« M. Lucas, ingénieur des Ponts et Chaussées, déjà connu par un livre de Géométrie générale ou supérieure sur les courbes planes, et par un ou-

---

(*) Qu'il me soit permis d'exprimer ici, comme j'ai déjà fait en 1868 (*Comptes rendus*, t. LXVI, p. 1310), le vœu que, dans les expériences ultérieures promises par M. Tresca, il prenne les dispositions nécessaires pour obtenir, dans son détail, à l'intérieur des blocs, la cinématique véritable des déplacements opérés, de manière à n'avoir pas à y suppléer par une cinématique en partie fictive, bien que celle-ci, heureusement, puisse avoir donné en général des approximations suffisantes pour son calcul des quantités de travail. Il a renoncé à cette division par rondelles superposées, qui était bonne pour obtenir quelques premières indications, mais qui altère considérablement l'intensité des efforts à faire, et même sensiblement la loi des déplacements. Ne serait-il pas possible, en évitant cet inconvénient, d'obtenir bien plus que les plaques ne peuvent donner? Que, par exemple, on plonge, dans le bain d'un métal en fusion, un réseau ou treillis (à trois dimensions) de fil fin d'un métal un peu moins fusible et d'une dureté peu différente, tel que du fil de plomb légèrement oxydé dans un bain d'étain ou d'alliage de plomb et de bismuth, etc.; il n'est guère douteux qu'une fois la solidification opérée, le sciage méridien du bloc ne fasse retrouver l'emplacement de tous les fils traversant le plan de coupe. Or, le treillis plongé peut être d'une forme connue et régulière, composé par exemple de circonférences horizontales, concentriques et équidistantes, formant une suite de plans superposés, maintenus aussi équidistants par quelques fils verticaux. Le sciage, fait après l'écoulement ou le poinçonnage, fournirait les coordonnées finales d'un grand nombre de points dont on connaît les coordonnées primitives. Et si l'on soumettait à la déformation une série de blocs tous pareils, en arrêtant l'opération à différents degrés d'enfoncement du poinçon ou de sortie du jet, on aurait, par le rapprochement des résultats, les *trajectoires* et les *transformées*, ces courbes donnant toute la cinématique du phénomène, et dont jusqu'ici il n'a pas été fait d'épures, même d'après les formules supposées les représenter.

vrage philosophique dénotant des connaissances variées dans les diverses branches des sciences physiques et naturelles, a présenté en 1868, à l'Académie, une suite de Mémoires dont nous nous proposons de rendre compte, et où son esprit spéculatif s'est occupé de la recherche théorique des conditions diverses de l'existence stable d'un système d'atomes agissant suivant diverses lois de répulsion ou d'attraction, fonctions de leurs distances mutuelles (1).

» Pour procéder du simple au composé, il commence par examiner l'effet, sur un point mobile unique, d'un nombre quelconque de points fixes disséminés sur un plan, et agissant suivant une loi qui n'existe pas dans la nature, mais dont la considération conduit à des résultats analytiques curieux, propres à éclairer la détermination de ceux qui résulteront d'autres lois moins simples et plus approchées de la réalité.

» Cette première loi hypothétique est celle d'une action en raison inverse de la simple distance des points fixes au point mobile.

» Lorsque cette loi est supposée, il y a un grand avantage, pour déterminer la résultante des actions, à se servir de ces coordonnées symboliques dites *affixes*, employées par Cauchy et par ses disciples, et où une seule lettre z, équivalant analytiquement à $x+y\sqrt{-1}$, détermine la position du point dont les coordonnées rectangles ordinaires seraient x et y.

» Si, du point mobile, on porte sur les prolongements de ses lignes de jonction avec les points fixes dont le nombre est appelé p, des longueurs proportionnelles aux répulsions qu'il en éprouve, les extrémités forment un ensemble de points fictifs tels, que le produit des distances du point mobile à chacun d'eux et au point fixe réel correspondant, donne, en divisant par la masse de celui-ci, une quantité constante. Un point fictif analogue peut être assigné pour la résultante. M. Lucas donne, pour avoir sa situation, une formule remarquable que nous croyons devoir rapporter. Si ρ représente la coordonnée symbolique de ce point, z celle du point mobile, z_n celle de celui des p points fixes réels z_1, z_2, z_3,... dont la masse est m_n, enfin Σ une somme relative à tous les points fixes, il trouve

$$\frac{1}{z-\rho} = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{m_n}{z-z_n}; \quad \text{ou} \quad = \frac{\varphi(z)}{f(z)},$$

si $f(z)$ est le produit des p binômes $z-z_n$ et si $\varphi(z)$ est une certaine fonc-

(1) Il a présenté depuis, dans la séance du 7 juin 1869, une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. LXVIII, p. 1313), où il envisage le sujet à un autre point de vue, et dont nous n'avons pas à nous occuper aujourd'hui.

tion du degré $p - 1$ contenant à la fois les coordonnées et les masses des points fixes. Il appelle pour cette raison $\varphi(z)$ la fonction des masses, tandis que $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_p)$ est dite la *fonction des points*.

» La fonction $\varphi(z)$ des masses, en vertu d'un théorème d'algèbre connu, est égale à la dérivée $f'(z)$ de la fonction des points, si toutes les masses sont égales à l'unité.

» Pour l'équilibre du point mobile il faut que ρ soit infini, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(z)$ soit nulle. On en conclut qu'il y a $p - 1$ positions d'équilibre, déterminées par les racines tant réelles qu'imaginaires de l'équation $\varphi(z) = 0$; résultat curieux auquel il n'aurait guère été possible d'arriver sans cette analyse symbolique.

» Maintenant l'auteur prend pour origine des coordonnées l'une de ces situations d'équilibre du point mobile, et il le suppose transporté de là dans une situation infiniment voisine. Si ε représente alors sa coordonnée symbolique infiniment petite, ou le déplacement qu'il a éprouvé en grandeur et en direction, l'équation qu'on a donnée tout à l'heure devient, la fonction φ étant d'abord supposée n'avoir pas sa dérivée première nulle pour la valeur zéro de sa variable,

$$\frac{1}{\rho} = -\varepsilon \frac{\varphi'(0)}{f(0)},$$

expression donnant toujours pour ρ la coordonnée symbolique du point fictif, d'une masse égale à l'unité, dont l'action remplacerait celle de tout le système.

» Si ce point fictif se trouve, avec l'origine actuelle des coordonnées et avec le point mobile déplacé, sur une même ligne droite, le point mobile abandonné à lui-même reviendra dans la situation d'équilibre ou s'en écartera, selon que le point mobile et le point fictif auront été d'un même côté de l'origine ou de part et d'autre de celle-ci. Il existe toujours deux droites rectangulaires satisfaisant, l'une à la première de ces deux conditions, l'autre à la seconde. C'est ce que l'auteur appelle l'*axe de stabilité* et l'*axe d'instabilité*.

» Si le point mobile infiniment peu écarté de l'origine, c'est-à-dire de la situation d'équilibre, l'a été dans toute autre direction que celle des deux axes, le mouvement qu'il prend est composé de deux autres : l'un périodique, représenté par une fonction circulaire, l'autre d'écart indéfini représenté par une fonction exponentielle réelle. Il décrit donc une sorte de sinusoïde dont les spires sont infiniment petites, mais sans cesse croissantes à partir du point de départ.

» D'où il suit que l'équilibre n'est stable qu'autant qu'un petit écart a lieu *rigoureusement* dans la ligne dite *axe de stabilité*. Cela revient à dire qu'un équilibre stable n'a qu'une probabilité nulle, ou est impossible, dans le système où la répulsion (et de même l'attraction si l'on en avait une) suit la loi supposée, et où la dérivée première $\varphi'(0)$ de la fonction dite *des masses* n'est point nulle.

» Telle est la conclusion assez remarquable du premier Mémoire.

» Le deuxième Mémoire considère des cas d'équilibre fort curieux, savoir : ceux dans lesquels une ou plusieurs des dérivées successives de la fonction $\varphi(z)$ des masses s'annulent en même temps que $\varphi(z)$, c'est-à-dire pour une valeur particulière de z qui soit une des valeurs donnant une position d'équilibre.

» Alors, si $n-1$ dérivées s'annulent, on a ce que l'auteur appelle un équilibre de $n^{ième}$ *ordre*; et l'équation ci-dessus, en faisant toujours pour plus de simplicité $z=0$, ou en prenant la situation d'équilibre pour origine, est remplacée par

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varphi^{(n)}(0)}{f(0)}\,\frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n}.$$

» L'auteur montre qu'il y a, passant par l'origine, $n+1$ directions de stabilité, divisant le plan en $n+1$ angles égaux, et $n+1$ directions d'instabilité bissectrices de ces angles. Ces dernières directions ne sont autre chose que les prolongements des premières lorsque n est pair.

» Comme exemple de cet équilibre de l'ordre n, on peut citer le cas où les points fixes, de masses toutes égales, occupent les sommets d'un polygone régulier de n côtés. Alors l'équation $\varphi(z)=0$ donnant les situations d'équilibre a ses n racines toutes égales, en sorte que la situation d'équilibre est unique et se trouve au centre du polygone. Les directions de stabilité sont suivant les rayons du polygone, et celles d'instabilité suivant les apothèmes.

» L'analyse pure donne, comme on sait, des résultats analogues dans un certain nombre de questions, par exemple dans celle des formes courbes représentées en coordonnées polaires ρ et θ par l'équation $\rho^n \cos n\theta = a^n$, où a est une constante et n un nombre entier positif ou négatif.

» Dans le cas singulier que nous considérons, il est remarquable que si le mobile est infiniment peu écarté de sa situation d'équilibre dans une direction qui ne soit pas une des $2n+2$ principales dont on vient de parler, puis abandonné à lui-même, il décrira une trajectoire n'ayant pas de branche infinie, en sorte que le rayon vecteur infiniment petit de celle-ci a

un maximum, ou varie entre certaines limites; ce qui est bien différent, comme on voit, de ce qui a lieu dans le cas du premier Mémoire, où $\varphi'(0)$ n'est point nul.

» Mais alors, l'action résultante du système, pour un déplacement infiniment petit ε d'un point hors de la situation d'équilibre, n'a qu'une intensité proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de cette quantité infiniment petite; en sorte que les mouvements ont, pour ainsi parler, une lenteur d'ordre supérieur; ce qui revient à dire que l'équilibre est indifférent. Et l'indifférence augmente avec le nombre n, qui sera, par exemple, celui des sommets de polygone régulier supposés occupés par les points fixes répulsifs.

» Telle est la conclusion principale et fort curieuse du second Mémoire, dont les résultats, pour être obtenus, ont exigé une analyse délicate et d'un genre paraissant souvent nouveau.

» Le troisième Mémoire contient des choses non moins singulières.

» L'auteur y range ses points fixes suivant un des réseaux de Bravais, à savoir : aux intersections de deux systèmes de droites parallèles équidistantes, appelées par lui, pour les distinguer, *rangées* et *files*, qui divisent le plan en mailles parallélogrammiques égales, et il suppose à tous ces points la même masse.

» Si $z = x + y\sqrt{-1}$ est toujours la coordonnée symbolique d'un point quelconque du plan par rapport à deux axes rectangulaires des x et des y ayant leur origine à l'un des *nœuds* du réseau, et si ω est, pour la rangée passant par cette origine, la différence des coordonnées symboliques z de deux points consécutifs, les situations de tous les points de cette rangée sont représentées évidemment par l'équation

$$\sin\frac{\pi z}{\omega} = 0;$$

ou, ces situations ont pour leurs z toutes ses racines positives et négatives.

» Si α est, de même, la différence des coordonnées consécutives z d'une *file*, l'équation donnant tous les nœuds de la rangée qui passe par le point dont la coordonnée est $n\alpha$ sur la file tirée de l'origine sera

$$\sin\frac{\pi(z + n\alpha)}{\omega} = 0.$$

Tous les nœuds du réseau plan indéfiniment étendu dans le sens des rangées, mais avec des files dont la longueur est limitée entre

$$n = -N \quad \text{et} \quad n = N$$

(en sorte qu'il n'y ait que $2N + 1$ rangées indéfinies, et un nombre infini de files d'une longueur limitée), seront donnés par une équation produit des équations semblables relatives à toutes les valeurs du nombre entier n, ainsi bornées. Ces équations peuvent être, avant leur multiplication, divisées chacune par un dénominateur constant arbitraire, propre à rendre le produit convergent. L'auteur prend $\sin\frac{n\pi\alpha}{\omega}$ pour ce diviseur, ce qui lui donne, $\prod$ désignant un produit de facteurs de même nom, l'équation suivante pour celle dont les racines z fixent les positions des nœuds du réseau (on a dû mettre hors du signe le facteur répondant à $n = 0$) :

$$\sin\frac{\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{\sin\frac{\pi(z+n\alpha)}{\omega}}{\sin\frac{n\pi\alpha}{\omega}}\;\frac{\sin\frac{\pi(z-n\alpha)}{\omega}}{\sin\frac{n\pi\alpha}{\omega}} = 0.$$

Elle est facilement transformable en

$$F(z) = 0, \text{ si l'on fait } \sin\frac{\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=N}\left(\frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega}}{\sin^2\frac{n\pi\alpha}{\omega}} - 1\right) = F(z).$$

» Or, lorsque le nombre N (moitié de celui des rangées moins une) est supposé infini, $F(z)$ est une fonction dont les propriétés ont été étudiées par Abel et par Jacobi (*). Comme elle donne, égalée à zéro, une équation dont les racines fournissent les situations de tous les points fixes supposés répulsifs d'un point mobile choisi quelconque, cette fonction $F(z)$ n'est autre chose, pour la question présente, que la *fonction de points* $f(z)$ ci-dessus du premier Mémoire, en sorte qu'on a, vu que toutes les masses sont égales, ρ étant toujours la coordonnée symbolique d'un point fictif de masse $= 1$ exerçant à lui seul l'action résultante de tous les points fixés sur un point mobile dont z est la coordonnée symbolique,

$$\frac{1}{z-\rho} = \Theta(z), \text{ si l'on fait } \frac{F'(z)}{F(z)} = \Theta(z).$$

» Mais, d'après les propriétés connues de $F(z)$, dont on déduit facilement celles de $F'(z)$, il est aisé de reconnaître, à leur quotient $\Theta(z)$, les

(*) On peut consulter le lumineux Traité de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques, n° 131, p. 148 et suivantes.

propriétés analogues suivantes :

$\Theta(-z) = -\Theta(z)$ c'est-à-dire que Θ est impair;

$\Theta(z+\omega) = \Theta(z)$, c'est-à-dire que Θ est périodique à période ω;

$\Theta(z+\alpha) = \Theta(z) - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}$, en sorte qu'il n'est pas périodique à période α.

» La résultante, dont la grandeur et la direction sont données par ρ, des actions des points fixes du système sur le point mobile, redevient, d'après la deuxième propriété de Θ, périodiquement la même quand le point mobile avance ou recule parallèlement aux rangées de manière à occuper les mêmes situations dans les mailles du réseau; et il n'en est pas de même, d'après la troisième propriété, si l'on fait cheminer le point mobile parallèlement aux *files*.

» Or si l'on avait pris les files pour les rangées, et réciproquement, ce dont on était le maître, la périodicité eût eu lieu en α et non pas en ω, c'est-à-dire en faisant éprouver au point mobile le cheminement indiqué le second tout à l'heure, et non celui qui a été indiqué le premier.

» Mais là ne se borne pas la contradiction ou l'impossibilité.

» Bravais a démontré, et il est on ne peut plus facile de voir, que tout système de points comme celui que nous considérons *appartient à une infinité de réseaux*, dont les rangées ou les files sont les diagonales, soit des parallélogrammes élémentaires du premier, soit de parallélogrammes composés de deux, trois, quatre, cinq, etc., de ceux-ci considérés bout à bout. Ces rangées ou ces files ont à peu près toutes les directions possibles, sans qu'aucun nœud soit délaissé, ni aucun nouveau nœud introduit, en sorte qu'ils restent en pareil nombre, et sans même que les aires des mailles soient changées.

» Il en résulterait que la fonction $\Theta(z)$ ne serait pas périodique en ω seul, elle serait périodique à une infinité de périodes, et non périodique à d'autres périodes, par rapport auxquelles on la fait devenir périodique rien qu'en la composant par un calcul inverse, ou en permutant les files et les rangées.

» Ces absurdités ou ces contradictions sont des conséquences inévitables de ce qu'on a supposé infini le nombre N des rangées comme celui des files, ou, ce qui revient au même, de ce qu'on a supposé les files infiniment longues, comme les rangées.

» Quelque chose de semblable se présente, comme on sait, dans la théorie des intégrales doubles à limites infinies, et dans celle des fonctions

doublement périodiques. L'infini en deux sens attribue à une foule de formules, quand on l'y introduit, des valeurs différentes suivant la manière dont on fait varier les quantités qui sont portées à des valeurs infinies, en sorte que l'infini supposé en deux sens amène l'indétermination.

» On voit qu'avec un réseau de points ou de centres répulsifs ou attractifs, infini dans deux sens, la répulsion ou attraction résultante sur un point mobile est quelque chose d'indéterminé, qu'on ne peut exprimer analytiquement sans être conduit à des résultats qui se contredisent.

» Sans analyse, ou *à priori*, l'on peut s'en rendre compte jusqu'à un certain point. En effet, dans un réseau tel que nous le considérons, il y a autant de sommets de mailles, et aussi de centres de mailles, qu'il y a de mailles. Mais quant à des milieux de côtés des mailles, il y en a deux fois plus. Or chaque centre de maille est un centre de figure de tout le réseau, et est par conséquent une situation d'équilibre du point mobile attiré ou repoussé par les sommets. Il en est de même de chaque milieu de côté. L'on voit ainsi qu'il y aurait trois fois plus de situations d'équilibre qu'il y a de points fixes répulsifs ou attractifs; ce qui est en contradiction avec ce qui a été démontré au premier Mémoire, à savoir que : pour p points fixes, il n'y a que $p-1$ situations d'équilibre du point mobile, lorsque la loi d'action est bien ce que nous supposons ici.

» Un nombre de points infini en deux sens, sur un plan, est donc une sorte d'impossibilité tout au moins physique, c'est-à-dire en tant que l'on doue les points de cette existence qui a pour caractère les actions exercées.

» Ce n'est pas le seul cas où l'admission d'une infinité de choses ayant une réalité objective, dans un espace même fini, mène à des résultats contraires à tout ce que la nature nous montre, ou incompatibles avec la grande loi explicative des faits, savoir : celle des actions mutuelles fonctions des distances. Ainsi, Poisson et Cauchy ont montré, dans leurs premières recherches de mécanique moléculaire (1828), que si ces *sommes* de composantes d'actions mutuelles de points matériels qu'on appelle des *pressions* ou *forces élastiques* s'exerçant à travers une petite face, sont *converties en intégrales*, l'on a des pressions dont les composantes normales ne varient que comme les carrés des densités des corps comprimés ou dilatés, et dont les composantes tangentielles sont toutes nulles; conséquemment plus de solidité, rien que des fluides, et des fluides sans frottement, sans action latérale, plus subtils par conséquent que les gaz et que l'éther lui-même, car ils ne pourraient transmettre les vibrations transversales qui produisent la

lumière. Leurs petits amas s'étendraient même indéfiniment comme des espèces d'atmosphères (*).

» Dans le quatrième Mémoire, M. Lucas abandonnant toute hypothèse particulière sur la relation entre l'action atomique et la distance, admet qu'elle est représentée par une fonction continue *quelconque* de celle-ci. Il considère toujours, sur un plan, des points fixes en nombre fini agissant sur un point mobile unique. Il les rapporte à des coordonnées rectangles ordinaires.

» Après avoir déterminé les conditions d'équilibre du point mobile, et transporté l'origine dans une de ses positions d'équilibre, il l'en écarte infiniment peu et cherche la trajectoire qu'il décrira si ensuite on l'abandonne à l'action des points fixes. Il y a deux axes principaux, rectangulaires, suivant lesquels l'écart donne lieu à un mouvement suivant ces axes mêmes. Ce mouvement le ramènera à sa situation d'équilibre ou l'en écartera suivant le signe de deux certaines quantités P, Q qui reviennent aux dérivées partielles, par rapport aux deux coordonnées, des sommes de composantes des actions, suivant leurs directions respectives. Si ces deux quantités sont égales et de signe contraire, on a le mouvement considéré dans le premier Mémoire, car alors l'action doit être en raison inverse de la simple distance. Si elles sont toutes deux négatives, les mouvements déterminés par un petit écart quelconque sont, en projection sur les deux axes, périodiques l'un et l'autre ; mais le mouvement composé n'est pas pour cela vibratoire ; on ne fait pas repasser le mobile par les mêmes points si $\sqrt{\frac{P}{Q}}$ est incommensurable, car alors la trajectoire a une infinité de spires non superposables, renfermées dans un petit rectangle. Il devient vibratoire évidemment si $P = Q$, ou si les périodes dans les deux sens sont égales ; mais cela ne répond qu'au cas idéal où l'action serait en raison *directe* de la simple distance.

» Enfin, au cinquième Mémoire, l'auteur, quittant la distribution sur un seul plan, considère un système quelconque d'atomes fixés dans l'espace, agissant sur un atome mobile unique suivant une loi quelconque de relation avec la distance.

(*) On peut voir un Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps, au *Bulletin de la Société Philomathique* pour 1844.

» En composant le potentiel de toutes les actions exercées, ses dérivées par rapport aux trois coordonnées rectangles donnent les sommes de ces actions dans les sens respectifs de ces coordonnées. Supposons qu'en plaçant le mobile dans une des situations où il y a nullité de ces trois dérivées, c'est-à-dire équilibre, on l'en écarte ensuite infiniment peu, et puis qu'on l'abandonne à lui-même ou plutôt à l'action qu'exercent sur lui les points fixes du système. Les trois composantes de cette action totale sont égales aux sommes des produits des trois projections du petit déplacement sur les coordonnées, par neuf paramètres se réduisant à six distincts, en vertu de trois égalités deux à deux entre eux.

» L'auteur démontre que les axes peuvent être choisis de manière que les trois paramètres doubles s'annulent, ce qui est une propriété analogue à celles des pressions dans un corps quelconque, ou à celles des actions intérieures envisagées par Fresnel. Alors les trois composantes sont représentées par des monômes, produits des trois autres paramètres par les déplacements dans leurs sens. En les remplaçant par les dérivées secondes des mêmes déplacements, prises par rapport au temps, l'intégration donne l'égalité des déplacements, au bout d'un temps quelconque, aux déplacements initiaux de même sens, multipliés respectivement par les cosinus des produits du temps et des racines carrées des trois paramètres pris en signe contraire. Si ces paramètres sont tous trois négatifs, l'on a un mouvement *limité* dont les projections sur les axes sont des quantités périodiques, mais qui n'est vibratoire que si les trois périodes sont les mêmes, ou au moins commensurables entre elles.

» Si un ou deux de ces paramètres, ou tous trois, ont le signe +, le mouvement n'est pas limité.

» On trouve de cette manière que quand l'action atomique varie suivant une puissance positive quelconque de la distance, l'équilibre du mobile est stable ou instable suivant que cette action est attractive ou répulsive.

» Si l'action, supposée répulsive, varie suivant une puissance négative, ou, ce qui revient au même, inversement à une puissance positive, et, si cette puissance est égale ou inférieure à 2, l'équilibre est instable. Il est encore instable si l'action supposée attractive s'exerce suivant la loi newtonienne de l'inverse du carré, ou suivant une loi où la puissance de l'inverse serait supérieure à 2.

» Le mouvement n'est oscillatoire, ou la trajectoire limitée ne repasse par les mêmes traces, que dans le cas idéal où l'action est attractive et proportionnelle à la simple distance.

» Mais ces conclusions supposent essentiellement que le nombre des points du système est fini. Elles ne sont point applicables à un nombre infini en tous sens; car les conclusions du quatrième Mémoire, relatives à un réseau plan où les actions étaient inverses des distances, peuvent être facilement étendues, dit l'auteur, à un système réticulaire dans l'espace, formé de cellules parallélépipèdes égales, dont les sommets ou nœuds sont supposés être des points matériels fixes, agissant par un point mobile proportionnellement à des fonctions quelconques des distances.

» En effet, dit M. Lucas, soient N le nombre des nœuds d'une rangée, N′ le nombre des rangées d'un des réseaux plans, et N″ le nombre des réseaux du système réticulaire total. La totalité des nœuds sera NN′N″, produit qui, si N, N′, N″ croissent jusqu'à l'infini, donne un infini du troisième ordre; nombre infini qui, malgré cet ordre supérieur, serait toujours contenu dans la suite, infiniment prolongée, des nombres successifs de l'un des infinis du premier ordre N, N′, N″. On n'imaginerait donc pas un système réticulaire infini d'atomes sans arriver à d'inadmissibles conséquences analytiques, qui se traduiraient dynamiquement ou statiquement par une indétermination de l'action résultante exercée sur un atome mobile unique.

» *Conclusions*. — L'auteur termine par ces considérations générales ses cinq Mémoires. Vos Commissaires pensent, qu'à les considérer au point de vue analytique, ils offrent des résultats exactement et ingénieusement déduits, en grande partie neufs, quoique ayant des analogues dans quelques sujets déjà traités, et offrent, sur une des matières les plus dignes d'attirer aujourd'hui l'attention des géomètres-physiciens, des études intéressantes et même utiles comme introduction à d'autres. Ils vous proposent de remercier M. Lucas de ses communications, et de l'encourager à continuer ses recherches, surtout s'il arrive à rapprocher ses hypothèses des lois régissant le monde physique réel, et à donner des explications mathématiques de faits que révèle l'observation. »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MÉMOIRES LUS.

M. Zaliwski donne lecture d'une Note relative à une pile à trois liquides, qu'il considère comme supérieure à la pile de Bunsen. L'élément de pile est formé de deux vases poreux, placés l'un dans l'autre et contenus dans

un vase extérieur. Le vase poreux interne contient de l'acide nitrique et une lame de charbon; le vase intermédiaire contient de l'acide sulfurique; le vase externe contient une solution de chlorhydrate d'ammoniaque et une lame de zinc.

(Commissaires : MM. Becquerel, Edm. Becquerel, Fizeau.)

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

PHYSIQUE. — *Mémoire sur les images accidentelles des objets blancs; par* **M. J.-M. Seguin**. (Extrait par l'auteur.)

(Renvoi à la Section de Physique.)

« Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie fait suite à des recherches dont le résumé a été publié dans les *Annales de Chimie et de Physique* (3e série, t. XLI, p. 413). Je me suis abstenu pendant longtemps de les continuer, parce que le phénomène des couleurs accidentelles correspondantes à des objets blancs est assez complexe pour faire craindre l'influence des dispositions personnelles sur les résultats de l'observation, et que l'accord de plusieurs observateurs est indispensable pour faire foi en ces matières. J'ai trouvé la preuve de cet accord, et par suite un motif de confiance, dans le *Traité d'optique physiologique* de M. Helmholtz, où mes premières expériences sont citées comme exactes et comme conformes à celles de l'auteur et à celles de M. Fechner.

» La théorie des images accidentelles est encore hypothétique. M. Helmholtz l'établit, avec l'autorité incomparable qui lui appartient, sur ces deux considérations, que la rétine se fatigue comme les autres nerfs, et qu'une même couleur est capable d'ébranler des nerfs de plusieurs sortes. Cette théorie ne s'applique pas sans difficulté aux phases colorées qui caractérisent les images accidentelles des objets blancs; et je pense qu'il conviendrait d'y joindre l'idée d'une différence marquée entre les mouvements qui produisent soit la vision directe, soit l'image positive, et ceux d'où provient l'image négative. Quelle que soit la valeur de cette idée, j'ai fait, en la suivant, une nouvelle analyse des phénomènes de coloration subjective, provoqués par les objets blancs.

» Les phases de l'image positive sont les suivantes :

Vert-jaune, bleu, rouge-violet

Cette série comprend le jaune de plus que la série indiquée par le *Traité d'optique physiologique*.

» Pour l'image négative, on n'a cité qu'un nombre restreint de phases, avec des divergences dans la dénomination des couleurs. C'est que le phénomène n'a pas dans toutes les expériences son entier développement, et que ses premières phases se confondent souvent avec les dernières de l'image positive. Dans des conditions favorables, les phases se montrent nombreuses, nettement accusées et très-persistantes. J'en distingue deux groupes où les couleurs se succèdent dans le même ordre, savoir :

1er *groupe*......... Rouge-violet, bleu, vert, jaune;
2e *groupe*.......... Rouge, violet, bleu, vert, jaune.

Je laisse jointes par un trait-d'union les couleurs qui ne se séparent pas franchement, et dont l'ordre de succession peut sembler douteux. Mais à l'aspect du second groupe, qui est très-net, le doute cesse tant pour le premier groupe négatif que pour les phases positives qui sont, deux à deux, complémentaires des phases négatives. L'orangé fait défaut, se confondant peut-être avec le bleu, qui paraît souvent lavé de blanc ou grisâtre.

» J'ai fait des observations nombreuses sur les modifications que les images éprouvent quand on les projette sur des surfaces blanches plus ou moins éclairées. Par là s'explique la coloration singulière des objets blancs qu'on regarde longtemps avec fixité. La série des couleurs est celle-ci :

Jaune-vert, bleu, violet-rouge.

Grâce à la couleur verte, que M. Fechner n'a pas observée et que j'ai notée plusieurs fois, cette série offre en sens inverse les couleurs complémentaires des phases positives.

» Comme, dans toutes ces phases, l'ordre de succession paraît dépendre de l'intensité lumineuse des couleurs, j'ai essayé de contrôler les résultats précédents par ceux qu'on obtient en observant l'apparition et la disparition des images accidentelles, tant positives que négatives, des différentes régions du spectre. M. Helmholtz a fait des expériences sur ce sujet. Les miennes sont incomplètes; mais les indications déduites des unes et des autres confirment, en plusieurs points, les recherches relatives aux images accidentelles des objets blancs. »

M. Champouillon adresse à l'Académie, par l'intermédiaire de M. Larrey, un Mémoire portant pour titre « De la statistique officielle relative aux propriétés thérapeutiques des eaux minérales de Baréges, d'Amélie-les-Bains, de Vichy et de Bourbonne. »

« Dans ce Mémoire, l'auteur énumère les difficultés qui empêchent

MM. les médecins inspecteurs des établissements thermaux de fournir des données statistiques exactes et complètes sur les résultats définitifs de l'action des eaux minérales. Il montre ensuite comment, au moyen des nombreuses formalités auxquelles sont assujettis tous les militaires destinés à suivre un traitement hydrominéral, il est possible, au contraire, de recueillir des renseignements précis sur les effets immédiats et sur les effets consécutifs des eaux.

» Ces renseignements, en ce qui concerne Baréges, Amélie-les-Bains, Vichy et Bourbonne, ont été mis en ordre par M. Champouillon, et consignés dans une série de tableaux qui font l'objet principal de cette Note. »

(Commissaires : MM. Andral, Ch. Sainte-Claire Deville, Larrey.)

M. E. Combescure adresse, par l'intermédiaire de M. Bertrand, un Mémoire intitulé : « Sur quelques questions que l'on peut rattacher à la théorie des lignes isothermes permanentes ».

(Commissaires : MM. Bertrand, Serret.)

M. Lawson Tait adresse deux Notes, écrites en anglais et relatives, l'une à la staphyloraphie, l'autre à l'action de l'hydrate de chloral.

(Commissaires : MM. Milne Edwards, Cl. Bernard, St. Laugier.)

M. G. Lambert exprime le désir de soumettre à l'appréciation de l'Académie ses idées sur les opérations qu'il conviendrait d'effectuer, pour arriver à une détermination expérimentale de la forme de la Terre.

La Lettre ne contenant que des indications générales et l'énumération des opérations en question, l'Académie attendra que l'auteur lui ait fait parvenir des détails sur la nature de ces opérations elles-mêmes, pour nommer une Commission chargée d'en faire l'examen.

CORRESPONDANCE.

M. Naumann, nommé Correspondant pour la Section de Minéralogie et Géologie, adresse ses remercîments à l'Académie.

M. le Ministre de l'Instruction publique autorise l'Académie à prélever une nouvelle somme sur les reliquats disponibles des fonds Montyon,

pour l'affecter au concours du grand prix relatif à l'application de l'électricité à la thérapeutique.

M. le Président de la Société de géographie informe l'Académie que cette Société tiendra sa deuxième assemblée générale de 1869, le vendredi 18 février, et adresse pour cette séance un certain nombre d'invitations.

M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, un ouvrage de feu *M. J. Civiale*, adressé à l'Académie par son fils *M. Aimé Civiale* et ayant pour titre : « la Lithotritie et la taille ». La publication de cette édition a été surveillée par *M. Guardia*, conformément au vœu exprimé par M. Civiale lui-même.

« M. le Secrétaire perpétuel signale à l'attention de l'Académie, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, la « Carte géologique-agronomique du département de la Haute-Vienne », par *M. Mallard*, ingénieur des Mines, professeur de Géologie à l'École des Mineurs de Saint-Étienne. Cette Carte, où les différents terrains sont indiqués par des teintes appliquées dans les ateliers chromo-lithographiques de MM. Auril frères, se compose de quatre feuilles ayant pour base un report sur pierre, exécuté par M. Lemercier, des parties correspondantes de la Carte topographique de la France, au 80000e, levée par les officiers d'État-Major et gravée au Dépôt général de la Guerre. Elle a été publiée en 1869, en vertu de l'autorisation du Conseil général de la Haute-Vienne, sous l'administration de M. A. Demanche, préfet du département.

» M. Mallard a distingué, dans la Haute-Vienne, vingt-deux espèces différentes de masses minérales, dont les rapports de gisement sont exprimés par huit coupes figuratives qui traversent le département en sens divers. La plupart de ces masses minérales appartiennent aux terrains anciens et un grand nombre d'entre elles sont d'origine éruptive. Les roches, de la famille du granit, dont l'auteur distingue sept variétés, y jouent un rôle principal. Les micaschistes et les gneiss, que M. Mallard classe parmi les roches sédimentaires primitives, occupent aussi de grands espaces. Des masses ou des filons de porphyre, de diorite, de serpentine pénètrent les roches précédentes. Des filons quartzeux, remarquables par leur puissance et leur étendue, traversent les leptynites, les gneiss, les schistes. Ces masses minérales si variées, dont l'auteur a tracé les contours avec le plus grand soin, paraissent, au premier abord, former une agglomération assez confuse;

mais en considérant avec attention la carte de M. Mallard, on voit s'y dessiner plusieurs directions très-distinctes.

» Cet habile ingénieur a donné une attention spéciale aux gisements des minerais métalliques et de toutes les substances exploitables. On voit avec intérêt, sur sa Carte, les gîtes stannifères de Vaulry et de Cieux placés sur le contour d'une grande masse de granit à mica blanc, et les gîtes de kaolin, encaissés aux environs de Saint-Yrieix et de Coussac dans une bande de micaschiste comprise entre deux grandes masses de leptynite.

» M. Mallard a justifié le titre d'*agronomique* que porte sa Carte en consacrant une colonne spéciale de la légende à la nature agronomique du terrain qui recouvre habituellement chaque espèce de roche. Cette légende, qui est fort étendue, présente un tableau très-détaillé de la pétrographie de la Haute-Vienne, et l'auteur n'aura qu'à la développer pour donner une description géologique complète du département à l'étude duquel il a consacré si utilement plusieurss années de travail. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre; par* **M. C. Jordan.**

« Dans une précédente Communication (*Comptes rendus*, 12 avril 1869), nous avons montré que l'équation X, dont dépend la trisection des périodes dans les fonctions abéliennes à quatre périodes, a deux réduites Y et Z respectivement analogues à l'équation aux 45 triangles et à celle aux 27 droites des surfaces du troisième ordre. Pour faciliter la comparaison ultérieure de ces deux problèmes, en apparence si différents, il peut être utile de rechercher réciproquement quelle est la combinaison des 27 droites (ou des 45 triangles) qui, prise pour inconnue, dépendra d'une équation analogue à celle qui donne la division d'une fonction abélienne.

» Soient, comme à l'endroit cité, $(x y\ x_1 y_1)$ les racines de X, et soit f une fonction symétrique des deux racines (1000), (2000). Elle dépend, comme on sait, d'une équation du quarantième degré, après laquelle on n'aura plus à résoudre qu'une équation du second degré pour obtenir les racines de X. Les substitutions du groupe de X qui laissent f invariable se réduisent aux suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left| \begin{matrix} x, y & ax + cy + a'x_1 + c'y_1, & dy \\ x_1, y_1 & c'y + a'_1 x_1 + c'_1 y_1, & d'y + b'_1 x_1 + d'_1 y_1 \end{matrix} \right|,$$

formant le quarantième du nombre total, et, transformant les unes dans les

autres les substitutions de la forme

(B) $$|x, y, x_1, y_1 \quad x + cy, y, x_1, y_1|.$$

» Elles permuteront donc exclusivement entre elles les neuf fonctions 1, 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26, 27, que les substitutions (B) n'altèrent pas. Soit donc φ une fonction symétrique des neuf fonctions ci-dessus; elle sera une fonction rationnelle de f. Réciproquement f sera une fonction rationnelle de φ; car s'il en était autrement, le groupe (C), formé par celles des substitutions du groupe de X qui n'altèrent pas φ, étant plus général que (A), aurait pour ordre un multiple de celui de (A), et, par suite, le degré de l'équation dont dépend φ se réduirait à un diviseur de 40, résultat absurde, les équations Y et Z n'ayant aucune réduite de degré inférieur à 27. Donc f sera elle-même une fonction symétrique de 1, 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26, 27.

» Cela posé, désignons par 1, 2, 3,..., 45 les triangles d'une surface du troisième ordre; par $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ la droite qui figure dans les cinq triangles α, β, γ, δ, ε; soient, comme à l'endroit cité,

$$(1, 37, 34, 41, 45), \ldots, (11, 38, 23, 29, 6)$$

les 27 droites. On vérifiera aisément que l'*ennéaèdre* formé par les triangles 1, 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26, 27 jouit des propriétés suivantes :

» 1° Ces triangles n'ont aucune droite commune;

» 2° Soient a, b deux quelconques d'entre eux; le triangle c qui, combiné avec a et b, forme un *trièdre* (défini à la façon de Steiner), fera lui-même partie de l'ennéaèdre.

» Il résulte évidemment de ces propriétés que, l'ennéaèdre étant supposé connu, les neuf triangles dans lesquels il se décompose ne dépendront plus que d'une équation hessienne (on verra aisément qu'il faudra encore résoudre une équation du troisième degré, à discriminant carré, pour obtenir les 27 droites).

» On peut s'assurer comme il suit que ces propriétés suffisent à caractériser complétement nos ennéaèdres.

» Soient T_1, T_2 deux triangles quelconques n'ayant aucune droite commune, T_3 celui qui forme un trièdre avec ces deux-là, T_4 un triangle qui n'ait aucune droite commune avec les trois précédents, T_5 celui qui complète le trièdre T_1, T_4. Il existera quatre triangles seulement, T_6, T_7, T_8, T_9 n'ayant aucune droite commune avec les précédents. Le nombre des systemes de 9 triangles tels que $T_1, \ldots, T_9$ est égal à $45.32.12$, car on peut

choisir T_1 de 45 manières, puis T_2 de 32 manières, et enfin T_4 de 12 manières.

» Or tout ennéaèdre jouissant des deux propriétés ci-dessus énoncées se trouvera 9.8.6 fois répété dans la suite des systèmes ainsi obtenus : car on l'obtiendra en prenant pour T_1 l'un quelconque des 9 triangles de l'ennéaèdre, pour T_2 l'un des 8 triangles restants, et enfin pour T_4 l'un des 6 triangles restants qui ne font pas un trièdre avec T_1 et T_2. Le nombre total des ennéaèdres jouissant des propriétés voulues ne peut donc dépasser $\frac{45.32.12}{9.8.6} = 40$.

» La réduite du quarantième degré qui a pour racines nos ennéaèdres ne doit point être confondue avec l'équation du même degré qui a pour racines les termes de doubles trièdres de Steiner; ces deux équations n'ont pas le même groupe. Elles ont cependant entre elles une affinité assez étroite : car en supposant respectivement une de leurs racines connue, les autres sont déterminées par deux équations du trente-neuvième degré, lesquelles auront le même groupe (*). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire.* Note de **M. Pellet**, présentée par M. Serret.

« Soit i une racine d'une congruence irréductible de degré ν et à coefficients rationnels.

» **1.** Le nombre des polynômes entiers, à coefficients fonctions rationnelles de i, irréductibles et de degré ν_1, est

$$\frac{p^{\nu\nu_1} - \sum p^{\nu\frac{\nu_1}{q_1}} + \sum p^{\nu\frac{\nu_1}{q_1 q_2}} - \ldots + (-1)^m p^{\nu\frac{\nu_1}{q_1 q_2 \ldots q_m}}}{\nu_1},$$

p étant le module premier et $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ les facteurs premiers de ν_1. Parmi elles, il y en a $\frac{\varphi(n)}{\nu_1}$ qui appartiennent à l'exposant n, diviseur propre de $(p^\nu)^{\nu_1} - 1$.

» **2.** Tout polynôme, à coefficients réels, irréductible (module p) et de degré μ, se décompose en un produit de δ facteurs irréductibles, à coef-

(*) Cette Note était déjà remise lorsque M. Cremona nous a communiqué les résultats auxquels il est parvenu de son côté, et qui concordent parfaitement avec les précédents, et avec ceux de M. Clebsch.

ficients fonctions rationnelles de i, tous de degré $\frac{\mu}{\delta}$, δ étant le plus grand commun diviseur de μ et de ν. Et si

$$x^{\frac{\mu}{\delta}} + A_1 x^{\frac{\mu}{\delta}-1} + A_2 x^{\frac{\mu}{\delta}-2} + \ldots$$

désigne l'un deux, les autres seront

$$x^{\frac{\mu}{\delta}} + A_1^p x^{\frac{\mu}{\delta}-1} + A_2^p x^{\frac{\mu}{\delta}-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{\frac{\mu}{\delta}} + A_1^{p^{\delta-1}} x^{\frac{\mu}{\delta}-1} + A_2^{p^{\delta-1}} x^{\frac{\mu}{\delta}-2} + \ldots.$$

» 3. Si, dans une fonction irréductible, à coefficients fonctions rationnelles de i, de degré ν_1 et d'exposant n, on remplace x par x^λ, λ ne renfermant que des facteurs premiers contenus dans n, le polynôme obtenu sera décomposable en $\frac{D\,2^{k-1}}{n}$ fonctions irréductibles, d'exposant λn de degré $\frac{\lambda n \nu_1}{D\,2^{k-1}}$, D étant le plus grand commun diviseur des nombres λn et $p^{\nu\nu_1} - 1$, et 2^{k-1} la plus haute puissance de 2 qui divise à la fois les numérateurs des fractions $\frac{p^{\nu\nu_1}+1}{2}$ et $\frac{\lambda n}{2D}$, réduites à leur plus simple expression.

» 4. Soit g une fonction rationnelle de i, et m le nombre des valeurs distinctes comprises dans la suite

$$g, \quad g^p, \quad g^{p^2}, \ldots.$$

» Si aucun des deux nombres $g + g^p + \ldots + g^{p^{m-1}}$, et $\frac{\nu}{m}$ n'est congru à 0 (module p), la fonction

$$x^p - x - g$$

est irréductible; dans le cas contraire, elle se décompose en facteurs du premier degré.

» 5. De ce dernier théorème, il résulte que, si l'on remplace x par $x^p - x$ dans un polynôme à coefficients rationnels, irréductible (module p) et de degré quelconque μ, on obtient une nouvelle fonction irréductible, pourvu que le terme de degré $\mu - 1$ ne soit pas congru à 0, dans le polynôme primitif; qu'en particulier, $\frac{(x^p - x)^n - 1}{x^p - x - 1}$ est irréductible (module p) et *à fortiori* algébriquement, si p est racine primitive de n, n étant premier.

» 6. Il y a $(p^\nu + 1)(p^\nu - 1)p^\nu$ fonctions linéaires, à coefficients fonctions rationnelles de i; et parmi elles $(p^\nu + 1)(p^\nu - 1)$ d'ordre p; $\frac{(p^\nu + 1)p^\nu}{2}\varphi(n)$

d'ordre n, diviseur de $p^\nu - 1$, autre que 1; et $\frac{(p^\nu - 1)p^\nu}{2}\varphi(n)$ d'ordre n, diviseur de $p^\nu + 1$, autre que 1 et 2. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur la déformation des surfaces.* Note de **M. A. Ribaucour**, présentée par M. Serret.

« Lorsqu'un corps invariable de forme est assujetti à quatre conditions, M. Mannhein a fait voir que, généralement, ses points décrivent des surfaces, et qu'à un instant déterminé, les normales à ces surfaces s'appuient toutes sur deux droites. Dans le cas particulier où ces deux droites se rencontrent toujours, « les lieux de leurs points de rencontre, dans l'espace » et dans le corps, sont deux surfaces applicables l'une sur l'autre ».

» Il résulte de là que, dans l'espace, l'étude de la déformation des surfaces est analogue à l'étude dans le plan du mouvement le plus général d'une figure, et que l'on peut trouver des propriétés de la déformation comme on trouve des propriétés relatives au roulement de la roulette sur la base. En cherchant dans cette voie, j'ai rencontré plusieurs propositions que je réunirai dans un prochain Mémoire. Je demande à l'Académie la permission d'en citer ici quelques-unes :

» J'ai fait voir, dans une Communication à la Société Philomathique, que : « Si des cercles ayant leurs centres sur une courbe (A) sont entraînés » avec leurs centres dans une déformation sans extension de (A), la somme » algébrique des arcs correspondants des deux courbes-enveloppes de ces » cercles est constante ».

» Ce théorème s'étendra à l'espace par les propositions suivantes :

« Si des sphères ayant leurs centres sur une courbe à double courbure (A) sont entraînées avec leurs centres dans une déformation sans » extension de (A), l'aire de la surface-enveloppe reste constante.

» Des sphères ayant leurs centres sur une surface quelconque (A), si » l'on suppose qu'elles soient entraînées avec leurs centres dans une défor» mation de (A) :

» 1° La somme algébrique des aires correspondantes des deux nappes » de la surface-enveloppe de ces sphères est constante, quelle que soit la » déformation de (A);

» 2° La somme algébrique des valeurs sphériques de ces aires corres» pondantes est aussi indépendante de la forme de (A) ».

» Ces deux derniers théorèmes sont, comme on le voit, une extension du célèbre théorème de Gauss; en voici une seconde :

» Dans chaque plan tangent d'une surface (A), marquons un point M qui sera déterminé par les coordonnées du point A où le plan tangent touche (A). Par le point M, menons une parallèle à la normale en A à (A). Toutes ces droites remplissant l'espace sont tangentes à deux surfaces (B) et (C), la droite issue de M les touchant en B et C.

» Si l'on suppose que ces droites sont entraînées en même temps que les plans tangents de (A) dans une déformation de cette surface, le produit de MB par MC reste invariable.

» On peut, de ce théorème, déduire celui sur les enveloppes de sphères à l'aide de la théorie des pinceaux de droites inaugurée par Kummer.

» Je m'étendrai plus longuement sur une dernière proposition générale :

« Des courbes sont tracées dans les plans tangents d'une surface (A).
» Si elles sont normales à une famille de surfaces, elles jouissent toujours
» de cette propriété, quelle que soit la forme de (A) ».

» Supposons que ces courbes soient des cercles. J'ai énoncé à la Société Philomathique cet autre théorème :

« Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une famille
» de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal ».

» Il en résulte une classe de systèmes triples orthogonaux que je proposerai d'appeler *systèmes cycliques*, intimement liée a la déformation des surfaces.

» Étant donnée une surface (A), on peut se proposer de chercher tous les systèmes cycliques qui en dérivent; le ds^2 de cette surface étant mis sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2 . dx\, dy,$$

on est conduit à l'équation du second ordre

$$(1) \quad \left(\frac{s}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\lambda^2}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\lambda^2}\right) - \left[\left(\frac{p}{\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{\lambda^2}\right)^2 - \frac{2Z}{\lambda^2}\right]\frac{d^2.\log\lambda}{dx\,dy} = 0,$$

où p, q, s sont les dérivées de Z par rapport à x et y; Z étant d'ailleurs une fonction qui suffit à déterminer le cercle relatif à chaque plan tangent de (A).

» Il résulte de ceci que l'intégrale générale des *systèmes cycliques* correspondant à une surface (A) contient quatre fonctions arbitraires : deux résultant de l'équation (1), et deux relatives à la forme de (A). L'équation (1) s'intègre immédiatement lorsque (A) est développable. Je mentionnerai, parmi les *systèmes cycliques*, celui qui correspond à des cercles de rayon constant. Dans ce cas, « les surfaces trajectoires de ces cercles sont toutes

» applicables sur la surface (A), qui, elle-même, est applicable sur la surface » de révolution qui a pour méridienne la tractrice. Le rayon des cercles » est égal à la courbure de (A) ».

» Si l'on considère le Z de l'équation (1) comme le carré du rayon d'une sphère ayant son centre au point xy, l'équation (1) exprime que *la somme algébrique des aires correspondantes des deux nappes de l'enveloppe de ces sphères est toujours nulle*.

» Les lignes qui, sur la surface (A), correspondent aux lignes de courbure des surfaces trajectoires des cercles forment un réseau conjugué; dans le cas où les rayons sont constants, ce réseau n'est autre que celui des lignes de courbure de (A).

» Comme on ne sait pas généralement intégrer l'équation (1), la recherche des systèmes cycliques paraît très-compliquée, mais on peut l'aborder autrement. J'ai trouvé, en effet, que :

« Si des sphères ont leurs cordes de contact normales à des surfaces, » les cercles passant par les centres de ces sphères et leurs points de contact avec leurs surfaces enveloppes sont normaux à une infinité de sur- » faces faisant partie d'un système cyclique ».

» Mais comme l'on peut ajouter une constante au carré des rayons des sphères enveloppées sans que les cordes de contact changent, il en résulte que l'on a un système cyclique contenant une constante arbitraire. Je citerai encore ce théorème :

« Si des surfaces font partie d'un système orthogonal, les cercles osculateurs de leurs trajectoires orthogonales correspondant à tous les points » d'une de ces surfaces sont normaux à une famille de surfaces apparte- » nant à un système cyclique ».

» Il résulte d'une Communication que j'ai faite antérieurement à l'Académie que, pour trouver tous les systèmes cycliques dont une surface (A) fait partie, il faut savoir intégrer sur cette surface l'équation linéaire

$$\frac{d^2 Z}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dZ}{d\rho}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{dZ}{d\rho_1}\frac{1}{H_1}\frac{dH_1}{d\rho},$$

le ds^2 rapporté aux lignes de courbure étant de la forme

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2.$$

Si les lignes de courbure de (A) sont des cercles géodésiques, cette équation s'intègre immédiatement.

» Je signalerai le cas simple où (A) est un plan, cas qui conduit à une transformation générale des surfaces avec correspondance des lignes de

courbure et d'où l'on déduit ce corollaire : « Les lignes de courbure d'une » surface (A) correspondent d'une infinité de manières aux lignes de plus » grande pente de deux surfaces, dont l'équation s'obtient par éliminations lorsqu'on connaît l'équation de (A) ».

» Je me propose d'exposer à l'Académie, dans une autre Communication, quelques théorèmes généraux sur la théorie des couples de surfaces applicables l'une sur l'autre, théorie entièrement distincte de celle qui précède. »

PHYSIQUE. — *Description d'un nouvel appareil électro-magnétique; par* **M. A. Demoget.**

« La bobine de M. Siemens a l'avantage de présenter des pôles magnétiques à grande surface; mais, à chacune de ses révolutions, elle ne produit que deux ondes électriques. On est alors obligé de lui imprimer un mouvement de rotation très-rapide, de 1600 à 2000 tours par minute, pour obtenir un courant continu formé de 3200 à 4000 ondes. Pour diminuer cette énorme vitesse, j'ai cherché à augmenter le nombre des bobines, pour avoir, à chaque révolution de l'arbre, un nombre d'ondes électriques plus grand, qui peut être représenté par N^2.

» Les nouvelles bobines en fer doux analogues à celles de Siemens, au lieu d'être cylindriques, sont rectangulaires; leur coupe transversale a la forme d'un double T, assez semblable à la section des fers à T employés dans les constructions. Leur longueur est égale à quatre ou cinq fois leur épaisseur, qui est de $0^m,5$. Le fil de cuivre isolé se place comme dans la bobine de M. Siemens.

» Le nouvel appareil se compose d'un volant en bronze, monté sur un arbre horizontal, auquel on peut imprimer un mouvement de rotation de 300 à 350 tours par minute. Sur le volant on fixe, au moyen de vis, quatre bobines rectangulaires, suivant deux diamètres perpendiculaires entre eux. Ces quatre bobines, qui tournent avec le volant et dans le même plan, passent entre huit armatures fixes en fer doux, placées de chaque côté suivant deux diamètres perpendiculaires. Sur chaque paire d'armatures, perpendiculairement à ces armatures, et dans la même direction par rapport au mouvement de rotation, viennent se placer des faisceaux d'aimants permanents, dont les pôles sont alternés, et entre les branches desquels passeront le volant et ses bobines.

» A chaque tour, l'aimantation de l'une des bobines changera quatre

fois, et le fil qui l'entoure donnera quatre ondes électriques, soit seize ondes pour les quatre par révolution de l'arbre.

» Un appareil, très-imparfaitement construit d'après ces données, ayant quatre bobines de $0^{m},20$ de longueur, sur chacune desquelles sont enroulés parallèlement trois fils de cuivre de 1 millimètre de diamètre et de 30 mètres de longueur, influencés par quarante aimants permanents qui peuvent porter 70 kilogrammes, rougit $0^{m},20$ de longueur d'un fil de platine de $\frac{8}{10}$ de millimètre et fond un fil de fer de même grosseur et de même longueur. La même machine produit environ par seconde $\frac{1}{2}$ centimètre cube de gaz provenant de la décomposition de l'eau.

» On comprend, d'après ce qui précède, que l'on peut monter sur un arbre commun deux systèmes de bobines, qui permettraient d'en faire soit une machine de Willd, soit une machine de Laad, en remplaçant les aimants permanents par des électro-aimants.

» La disposition des bobines, retenues simplement par une rainure et une vis, permet de les déplacer très-facilement, pour transformer l'électricité produite en tension ou en quantité. »

PHYSIQUE. — *Note sur un baromètre photographique et nouveaux détails historiques sur le rayonnement lunaire; par* **M. P. Volpicelli.**

« Les instruments graphiques sont très-utiles pour avoir une mesure continue des phénomènes, surtout en météorologie; mais, parmi eux, les instruments photographiques, étant les plus fidèles, doivent être préférés à tous les autres. En effet, dans les observatoires d'Angleterre, la photographie, pour les observations météorologiques, a été préférée; elle est indispensable pour les observations magnétiques. Cette méthode n'ayant encore été introduite ni à Rome, ni dans le reste de l'Italie pour la météorologie, j'ai voulu prendre l'initiative en construisant un baromètre photographique pour l'Université romaine. Les modifications principales que j'ai introduites, pour obtenir une plus grande exactitude, sont les suivantes :

» 1° L'échelle en millimètres est tracée sur une plaque de verre, et elle est photographiée avec les différentes variations barométriques, sur le même papier sensible, appliqué sur un cylindre qui accomplit une révolution autour de son axe, en vingt-quatre heures. On écarte ainsi toute erreur produite par les variations inégales que le papier peut éprouver.

» 2° Avec des écrans convenables et avec une lentille cylindrique assez haute, remplie d'une solution toujours saturée d'alun, qui se renouvelle

constamment au moyen d'un siphon, on rend sensiblement nul l'effet calorifique du foyer des rayons lumineux, qui tombe sur l'extrémité de la colonne barométrique.

» 3° Au moyen d'une lunette, on peut lire la hauteur barométrique *directement*, ce qui est utile pour contrôler, *avec le même baromètre*, l'exactitude des indications photographiques. Par ce moyen, on aura la certitude qu'avec les instruments photographiques on peut se dispenser absolument des observations *directes;* ce qui n'est pas permis avec les instruments enregistreurs *mécaniques*, ainsi que l'a justement observé M. Ch. Sainte-Claire Deville (1).

» 4° Un courant d'air peut traverser l'intérieur de la boîte où se trouve l'extrémité supérieure du baromètre, pour empêcher l'accumulation de la chaleur dans cette extrémité.

» 5° L'air réchauffé par la source lumineuse est porté en dehors de la chambre, au moyen d'un tube ayant une position et une forme convenables.

» 6° Un diaphragme percé d'un trou est interposé entre la source lumineuse et la lentille cylindrique, pour éviter les effets de l'extension variable de la flamme.

» 7° Ordinairement on a coutume de marquer les heures sur la courbe du papier sensible, au moyen d'un éclipsateur; mais on interrompt ainsi la continuité de la courbe photographiée. Afin d'éviter cette interruption, l'horloge qui produit la rotation marque l'heure *sur la marge* du même papier. Par ce moyen, la continuité protographique ne sera pas interrompue, et, de plus, malgré les variations inégales qui se présenteront dans les dimensions du papier, le temps y restera exactement enregistré.

» 8° Le papier est préparé avec quatre bains : le premier se compose d'azotate d'argent et d'eau; le second d'iodure de potassium et d'eau; le troisième de cire, d'iode et d'essence de térébenthine; le quatrième d'azotate d'argent, d'acide acétique et d'eau.

» 9° Le développement de l'épreuve négative est fait avec un cinquième bain, composé d'acide gallique, d'acide acétique et d'azotate d'argent.

» 10° On fixe la photographie avec un sixième bain d'hyposulfite de soude. Je ne sais pas si ce procédé chimique, qui produit un très-bon effet, coïncide entièrement avec d'autres déjà pratiqués.

» 11° En faisant glisser sur l'épreuve négative, ainsi obtenue, un vernier

---

(1) *Cosmos*, 3e série, t. IV, p. 485; année 1869.

muni d'un microscope, les divisions sont beaucoup agrandies, et l'on peut ainsi apprécier même les dixièmes de millimètre, parce que les divisions sur le papier sont photographiées avec une exactitude qui ne laisse rien à désirer.

» Les méthodes pour compenser automatiquement les effets de la température ambiante dans les baromètres photographiques, applicables aussi aux baromètres communs, sont nombreuses; il est nécessaire d'en assigner algébriquement les conditions, et je communiquerai bientôt les formules relatives à cette partie de la question, qui me semblent n'avoir pas encore été calculées.

» *P. S.* Je demande la permission d'ajouter ici quelques autres détails historiques à ceux que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie, relativement au rayonnement calorifique de la Lune (1), afin de montrer que c'est Melloni, et non pas un autre, qui a le premier démontré expérimentalement l'existence de la chaleur dans ce rayonnement.

» Plusieurs poëtes, tels que Virgile, Dante, le Tasse, Marini, Guarini et d'autres, nièrent la chaleur dans les rayons lunaires. Plusieurs philosophes, sans le démontrer, admirent avec raison la puissance calorifique dans ces rayons. Aristote dit : *Noctes in plenilunio sunt tepidiores;* et saint Thomas d'Aquin écrit : *Lux quantum est de se semper est effectiva caloris, etiam lux Lunæ.* Pic de la Mirandole et Jérôme Cardan admirent tous deux la chaleur dans le rayonnement lunaire. Mais on n'avait pas alors de thermomètres avec lesquels on pût faire des expériences sur ce sujet. Le physicien anglais Hooke expliqua la faiblesse sur la Terre de l'effet calorifique *direct* de notre satellite. Géminien Montanori, né à Modène (1632) et mort à Padoue (1687), dans son ouvrage intitulé : *L'Astrologia convinta di falsità* (Venezia, 1685, p. 5), raconte qu'au moyen d'un thermomètre à air et d'un grand miroir on vit le rayonnement de la Lune produire une élévation de température de *plusieurs* degrés. Mais comme Montanori ne dit pas par qui cette expérience avait été faite, comme le thermomètre était alors très-imparfait, et enfin comme on ne peut pas admettre un effet calorifique de plusieurs degrés, produit par le rayonnement lunaire sur notre globe, cette assertion ne mérite évidemment aucune confiance.

» Quant aux expériences dont parle Paul Frisi, dans ses *Opuscoli filosofici* (Milan, 1781, p. 9), en les lisant bien, chacun verra que cet auteur

(1) *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 920; année 1869.

considère comme vains tous les efforts faits de son temps par les physiciens, pour démontrer expérimentalement l'existence de la chaleur dans les rayons réfléchis par notre satellite. Dès lors, je puis affirmer de nouveau, malgré l'opinion contraire de M. l'abbé Zantedeschi (1), que le premier physicien ayant donné une démonstration expérimentale et incontestable de la chaleur des rayons lunaires, fut l'Italien Melloni, le 23 mars 1846 (2).

» Des expériences modernes plus précises, on doit conclure que le thermomètre le plus sensible, soit à air, soit à liquide, placé au foyer d'un miroir ou d'une lunette, ne peut pas rendre sensible l'existence de la chaleur dans le rayonnement lunaire. Cette conclusion avait déjà été regardée comme très-probable par M. Prevost (3).

» Enfin, pour démontrer que la Lune possède de la chaleur *en elle*, à cause de son réchauffement par le Soleil, il suffirait de démontrer par l'expérience que la température du rayonnement calorifique de notre satellite croît plus rapidement que sa surface éclairée, c'est-à-dire que sa phase croissante, et non pas proportionnellement à cette surface; et que le contraire arrive lorsque la phase lunaire décroît : de manière que la nouvelle Lune devrait encore réchauffer. Cela pourrait faire partie de l'ensemble des recherches intéressantes que M. Marié-Davy s'est proposé d'effectuer (4). »

PHYSIQUE. — *Les cristaux doubles de la neige; par* **M. J. Girard.**

« Lorsque l'on examine les aiguilles prismatiques de la glace qui se produisent sur une vitre humide exposée à un froid assez intense, il est facile de remarquer qu'elles affectent, dans leur rapide formation, une grande irrégularité dans le caractère du système cristallin; les causes multiples qui entrent concurremment dans la solidification de l'eau intervertissent la voie naturelle du phénomène. Mais elles sont détruites en partie quand une gouttelette d'eau, émanant des régions supérieures de l'atmosphère, passe successivement à travers des couches d'air dont la température est inférieure au zéro du thermomètre. Cette gouttelette isolée, se rap-

(1) *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 1070; année 1869.
(2) *Comptes rendus*, t. XXII, p. 541; année 1846.
(3) *Bibliothèque universelle de Genève*, t. XIX, p. 35; année 1822.
(4) *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 1154; année 1869.

prochant de la forme sphérique, est plongée dans un air ambiant uniforme. Dans sa chute elle cristallise en neige, suivant le système hexagonal, caractère invariable dans ses principaux éléments constitutifs.

» La cristallisation commence à s'effectuer à la périphérie suivant six branches équidistantes. La variété qui existe dans ces ramifications adhérentes au noyau central est motivée par les écarts dans les différences de volume des gouttelettes passant à travers des couches de l'atmosphère dont la température n'est pas uniformément semblable; quelques fractions de degré déterminent ces aspects multiples des fleurs de neige. Leurs dimensions variant en outre de 1 à 7 millimètres environ, il s'ensuit que les cristaux sont modifiés suivant les quantités de liquide qui sont entrées dans leur précipitation. Si les unes sont insuffisantes à leur complet achèvement, les autres sont trop importantes proportionnellement au volume moyen, dont les limites ne peuvent être dépassées. Ce dernier cas donne naissance à un *dédoublement* symétrique, sans séparation, de la gouttelette, qui se solidifie ainsi en deux parties. Dans cette subdivision, la réunion de chaque système cristallin s'opère an moyen d'un petit étai à section prismatique hexagonale ayant chacune de ses arêtes correspondant exactement à la naissance de chacune des six branches régulières des formations cristallines qu'il réunit. Le plus fréquemment il est plein, mais quelquefois aussi il est creux, étant plus épais, conservant malgré cela sa même section géométrique. Les cristaux doubles paraissent être un cas particulier de la neige, dans lequel ils ne s'écartent pas des caractères génériques.

» La température de — 3 degrés à la surface du sol est celle qui semble être le plus favorable aux observations; il est nécessaire que les flocons voltigent dans un air assez froid pour pouvoir être recueillis, tels qu'ils ont été précipités des régions atmosphériques, sur un drap noir que l'on soumet au microscope. (Observation du 19 janvier 1870.) »

PHYSIOLOGIE. — *Influence de la lumière verte sur la sensitive*. Note de **M. P. Bert**, présentée par M. Claude Bernard.

« En poursuivant sur la sensitive les recherches dont j'ai déjà eu l'honneur d'entretenir l'Académie (*Comptes rendus*, t. LXV, p. 177, et t. LXIX, p. 875), j'ai été amené à étudier l'influence de l'obscurité et de la lumière blanche ou diversement colorée. Je demande la permission d'indiquer aujourd'hui le résultat que m'a présenté la lumière colorée en vert.

» La méthode employée a consisté à placer les plantes dans des espèces

de lanternes à vitres colorées. Il y en avait une à verres noirs, une à verres blancs, les autres étaient violette, bleue, verte, jaune et rouge. J'ai déterminé, à l'aide du prisme, la véritable valeur de ces verres colorés; il est indispensable que je l'indique d'abord. Le verre violet se laissait traverser par le spectre entier, à l'exception de la région vert-jaune; à travers le verre bleu, la région vert-jaune était seulement affaiblie; le verre vert était sensiblement monochromatique, ne laissant passer, en outre du vert, qu'un peu de bleu et de jaune; le verre jaune était perméable aux rayons verts, jaunes, orangés, rouges; enfin, le verre rouge était véritablement rouge.

» La meilleure manière de mettre en évidence l'influence de ces diverses couleurs me paraît être de raconter succinctement une de mes expériences. J'appellerai blanche, par abrévation, la plante placée dans la lanterne à verres blancs, etc.

» Le 12 octobre 1869, je place dans chaque lanterne cinq jeunes sensitives; ces plantes proviennent d'un même semis, et sont sensiblement de même taille. Ces lanternes sont placées dans la serre chaude de la Faculté de Médecine. Déjà, quelques heures après, ces sensitives n'ont plus toutes le même aspect; les vertes, jaunes et rouges ont leurs pétioles dressés, leurs folioles relevées; les bleues et violettes, au contraire, ont les pétioles presque à l'horizontale, et les folioles étalées. Je n'insiste pas sur ces faits, qui feront le sujet d'une Communication ultérieure.

» Le 19, les sensitives noires sont déjà peu sensibles; le 24, elles sont mourantes ou mortes. Dès le 24, les sensitives vertes sont complétement insensibles; le 28, elles sont mortes. A ce moment, les plantes des autres lanternes sont parfaitement vivantes et sensibles; mais il est facile de remarquer entre elles une grande inégalité de développement. Les blanches ont beaucoup poussé; les rouges moins, les jaunes un peu moins encore; les violettes et les bleues ne semblent pas avoir grandi du tout.

» Le 28 octobre, on transporte dans la lanterne verte les sensitives vigoureuses de la lanterne blanche. Le 5 novembre, elles sont très-peu sensibles; le 9, la sensibilité a presque complétement disparu; le 14, toutes ces plantes sont mortes.

» Les sensitives des lanternes violette, bleue, jaune et rouge paraissent en parfait état de santé : elles sont, du moins, très-sensibles.

» Les choses restent dans cette situation jusqu'au commencement de janvier. A ce moment, toutes les plantes sont encore vivantes; les sensitives jaunes et rouges ont plus du double de la taille des sensitives violettes et bleues, qui n'ont presque pas grandi, sans s'être pour cela étiolées. Les

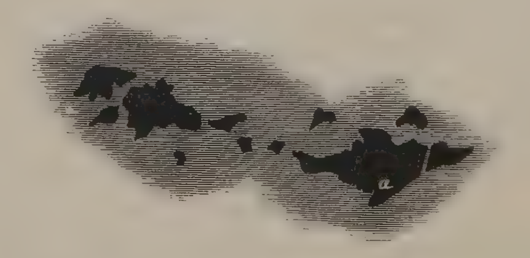
sensitives violettes paraissent déjà un peu malades. Le 14 janvier, elles sont mortes, mais les autres sont bien vivantes et sensibles. Malheureusement, dans les derniers jours de janvier, un accident met fin à l'expérience.

» Le point sur lequel je veux insister est celui-ci : les sensitives placées dans la lanterne verte ont perdu leur sensibilité, et sont mortes en un temps très-rapide, presque aussi vite que celles qui étaient placées dans l'obscurité. En tenant compte de la petite quantité de lumière jaune que laissait passer le verre vert, il semble permis de dire que le rayon vert agit comme l'obscurité.

» Il est infiniment probable que la sensitive ne fait que manifester, avec une rapidité et une intensité particulières, une propriété qui appartient à toutes les plantes colorées en vert. Je répéterai cependant ces expériences sur d'autres végétaux verts phanérogames et cryptogames, en opérant pendant un temps suffisamment long. J'étudierai également la manière dont se comportent, sous l'influence de la lumière rouge, les végétaux colorés en rouge et qui n'ont point de chlorophylle. »

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur deux taches solaires actuellement visibles à l'œil nu.* Note de M. **Tremeschini**.

« J'ai l'honneur d'adresser à l'Académie l'indication des dimensions de deux taches solaires, aujourd'hui visibles à l'œil nu, et dont les pénombres ne présentent aucune solution de continuité.



Première pénombre, renfermant plusieurs noyaux, observée vendredi matin 11 février, à 9 heures. Plus grand diamètre........................	0°3′45″
Seconde pénombre, renfermant plusieurs noyaux, dont un noyau ayant des proportions considérables; observée ce matin lundi 14 février, à 10 heures. Plus grand diamètre........................	0.4.50
Plus grand diamètre du noyau *a* formant partie de la seconde tache........	0.0.45,11

» La seconde tache présente à l'œil nu l'apparence d'une tache jumelle. »

ZOOLOGIE. — *Note sur quelques Mammifères du Thibet oriental*; par M. ALPH.-MILNE EDWARDS.

« Deux Singes habitent les forêts les plus froides et les moins accessibles du Thibet oriental. L'un appartient au genre Macaque, et doit se placer à côté du *M. speciosus*, du *M. Tcheliensis* et des autres espèces à queue très-courte. Son pelage est d'un brun grisâtre foncé; les poils, très-longs et très-épais, ne présentent pas de bandes diversement colorées; ils sont uniformément teintés de leur base à leur pointe; les parties inférieures du corps sont d'un gris beaucoup plus clair : la face et les mains sont couleur de chair. J'ai désigné ce Macaque sous le nom de *M. Thibetanus*.

» La seconde espèce doit prendre place dans le genre Semnopithèque; je l'ai nommée *S. Roxellana*. Elle se distingue de tous les autres représentants connus de ce groupe par son pelage extrêmement long et fourni, ressemblant à une toison de chèvre; les poils de la tête et du dos sont gris à leur base et d'un jaune argenté vers leur pointe; cette couleur domine sur les membres, sur le ventre et sur les côtés de la face; elle se mélange à une teinte rousse très-brillante sur la région frontale. La face est d'un vert jaune couleur turquoise, la paume des mains est brune. Le bord supérieur des narines est très-développé, de facon à constituer un véritable nez, très-court, il est vrai, mais fortement retroussé.

» J'ai remarqué également, parmi les animaux envoyés au Muséum par M. l'abbé A. David, plusieurs insectivores très-intéressants et qui doivent constituer deux genres nouveaux. L'un, que j'ai appelé le *Nectogale elegans*, semble établir un passage entre les Desmans et les Musaraignes; de même que les premiers, il a des pattes postérieures élargies en palettes natatoires; sa queue est longue et comprimée latéralement, mais son museau est court et ses dents ressemblent beaucoup à celles des Sorex; il n'y en a que vingt-huit ainsi réparties : seize à la mâchoire supérieure et douze à l'inférieure. Le second genre portera le nom d'*Anourosorex*; ainsi que ce nom l'indique, il se rapproche des Musaraignes, mais se distingue nettement par sa queue tellement courte, qu'elle disparaît sous les poils, et par ses pattes écailleuses; ses dents sont moins nombreuses que celles des *Sorex* : on n'en compte que vingt-quatre, douze en haut et douze en bas.

» Une Taupe, *Talpa longirostris*, paraît aussi constituer une espèce nouvelle; elle est caractérisée par son museau très-allongé, qui lui donne une certaine ressemblance avec la *T. Moogura* du Japon. Mais chez cette dernière

il n'y a que six incisives inférieures, tandis que chez notre espèce il en existe huit comme d'ordinaire.

» L'animal qui, sans contredit, présente le plus d'intérêt, est celui que M. l'abbé David nous avait signalé sous le nom d'*Ursus melanoleucus*. Par sa forme extérieure il ressemble en effet beaucoup à un ours, mais les caractères ostéologiques et le système dentaire l'en distinguent nettement et le rapprochent des Pandas et des Ratons. Il doit constituer un genre nouveau que j'ai appelé *Ailuropoda*.

» Il y a encore parmi les Mammifères envoyés de Moupin par M. l'abbé A. David plusieurs autres espèces qui me paraissent nouvelles, mais dont l'étude présente certaines difficultés qui m'empêchent de les décrire avant de les avoir comparées avec certains types que le Muséum de Paris ne possède pas. Cependant je citerai un Écureuil volant de très-grande taille et remarquable par son pelage, d'un roux brillant mélangé de blanc sur la tête et sur la poitrine. Je l'ai inscrit dans les Catalogues du Muséum sous le nom de *Pteromys alborufus*. »

« M. **Milne Edwards** rend brièvement compte d'une collection zoologique très-intéressante formée dans le Thibet oriental par M. l'abbé Armand David, et adressée au Muséum d'Histoire naturelle. Il dépose sur le bureau un Mémoire manuscrit de M. Alphonse-Milne Edwards sur quelques espèces nouvelles de Mammifères faisant partie de cette collection, et une Note imprimée de M. Verreaux sur le *Lophophorus obscurus*, et sur plusieurs autres oiseaux qui paraissent être également nouveaux pour la science. »

M. **Lerique de Mouchy** adresse une Note concernant « La cause du mouvement oscillatoire des granulations moléculaires ».

M. **Vernier** adresse à l'Académie une Note concernant une « Accumulation de chaleur, par la concentration de la chaleur rayonnante au travers de lentilles biconvexes de sel gemme, et l'application de cette chaleur à la production d'un courant d'air donnant lieu à un mouvement continu ».

M. **Delaurier** adresse une Note relative à la « Production de la lumière électrique par les bobines d'induction ».

M. G. **Caruso** adresse à l'Académie deux ouvrages, imprimés en italien, et intitulés : « Études sur l'industrie des céréales en Sicile » et « Traité de

la viticulture et de la vinification, ou le présent et l'avenir de l'œnologie dans l'Italie méridionale ».

Ces ouvrages seront soumis à l'examen de M. Peligot, pour en faire, s'il y a lieu, l'objet d'un Rapport verbal à l'Académie.

M. L. Veggia adresse, de Bologne, une étude sur la trisection de l'angle.

En vertu d'une décision déjà ancienne, les Communications sur ce sujet sont considérées comme non avenues.

« **M. Chasles** présente à l'Académie, de la part de M. le prince *Boncompagni*, le numéro d'août 1869 du *Bullettino delle Scienze matematiche et fisiche*, où se trouve un article de M. L.-Am. Sédillot intitulé : *Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France*. C'est la première partie d'une Notice qui s'étendra jusqu'à l'époque actuelle, et qui pourra avoir d'autant plus d'intérêt que l'ouvrage de l'abbé Goujet sur le Collége de France, qui s'arrête en 1758, renferme bien des lacunes et des erreurs. Nous remarquerons simplement dans ce moment que, dès les premiers temps de la fondation du Collége de France, les Mathématiques ont été représentées par trois chaires, dont les titulaires étaient Poblacion, Oronce Finé et Guillaume Postel; et la Physique par une chaire, sous le titre de Philosophie grecque et latine, confiée à François Vimercati, de Milan (il s'agissait de la Physique d'Aristote). »

A 5 heures un quart, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 5 heures trois quarts. É. D. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans la séance du 7 février 1870, les ouvrages dont les titres suivent :

Rapport sur deux petites éducations de vers à soie japonais, suivi de quelques reflexions sur l'emploi du microscope appliqué à la sériciculture; par M. N. Joly. Toulouse, 1869; br. in-8°. (Extrait du *Journal d'Agriculture pratique et d'Economie rurale.*)

Snr deux cas très-rares de mélomélie observés chez le mouton; par M. N. JOLY. Toulouse, sans date; br. in-8°. (Extrait des *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.*)

Rapport du Jury chargé de juger la quatrième période du concours quinquennal des Sciences mathématiques et physiques (1864-1868); *par* M. E. CATALAN. Bruxelles, 1869; br. in-8°.

Notice sur l'épidémie des fièvres typhoïdes qui a sévi pendant l'automne de 1869 *à Rive-de-Gier; par* M. KOSCIAKIEWICZ. Lyon, 1870; in-8°.

Le Ramié, nouvelle fibre textile; par M. F. DENNET, des États-Unis. Boulogne, sans date; 1 page in-4°.

Transactions... *Transactions de la Société philosophique de Cambridge,* t. XI, 2e partie. Cambridge, 1869; 1 vol. in-4°.

Proceedings... *Procès-verbaux de la Société philosophique de Cambridge,* liv. 3 à 6. Cambridge, 1866-1867; in-8°.

Paris... *Exposition universelle de Paris de* 1867. *Rapport des Commissaires des États-Unis. Examen des appareils télégraphiques et des procédés de télégraphie; par* M. S.-F.-B. MORSE. Washington, 1869; in-8°.

Ueber... *Sur la signification physiologique de l'arcade du labyrinthe dans l'organe de l'ouïe*; *par* M. F. GOLTZ. Sans lieu ni date; br. in-8°.

ERRATA.

(Séance du 7 février 1870.)

Page 220, ligne 5, *au lieu de* 1863, *lisez* 1823.

Page 223, ligne 4, *au lieu de* on fait, *lisez* ou fait.